4 Ομοιόμορφη συνέχεια

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνέχειας:

Ορισμός 4.1 *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ (όπου $A \subseteq \mathbb{R}$) είναι* ***συνεχής στο*** *A αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $t \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
αν $s \in A$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Το δ συνήθως εξαρτάται όχι μόνον από το ε αλλά και από το t:

Παράδειγμα 4.1 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x^2$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Ας θυμηθούμε την απόδειξη:

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ ΚΑΙ $t \in [0, +\infty)$, ψάχνουμε για ένα κατάλληλο $\delta > 0$. Είναι βολικό να αναζητήσουμε $\delta < 1$ (αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ που να ικανοποιεί τον ορισμό 4.1, κάθε μικρότερο θετικό δ επίσης θα τον ικανοποιεί, άρα θα υπάρχει και κάποιο $\delta \in (0, 1)$). Αν τώρα $|s - t| < \delta <$ τότε $|s| < |t| + \delta < t + 1$, οπότε

$$|f(s) - f(t)| \leq |s - t|.|s + t| < \delta(|s| + |t|) < \delta(2t + 1)$$

επομένως για να εξασφαλίσουμε ότι $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ αρκεί να διαλέξουμε

$$\delta \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2t + 1}, 1\} \tag{1}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Παρατηρούμε εδώ ότι δεν υπάρχει θετικό δ που να ικανοποιεί την ανισότητα (1) για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (αφού το δεξί σκέλος της τείνει στο 0 καθώς $t \to \infty$). Μήπως όμως υπάρχει ένα $\delta > 0$ που ικανοποιεί τον ορισμό 4.1 (με δεδομένο $\varepsilon > 0$) για κάθε t; Όχι. Γιατί αν υπήρχε, τότε για κάθε $t > 0$ θέτοντας $s = t + \delta$ θα είχαμε

$$|f(s) - f(t)| = (t + \delta)^2 - t^2 = 2t\delta + \delta^2 < \varepsilon$$

πράγμα αδύνατο, εφόσον καθώς $t \to \infty$ έχουμε ότι $2t\delta + \delta^2 \to +\infty$ όποιο και να είναι το δ (αρκεί να είναι θετικό), οπότε δεν είναι δυνατόν να ισχύει $2t\delta + \delta^2 < \varepsilon$ για κάθε $t > 0$ (πάρε π.χ. $t = \frac{\epsilon}{\delta}$).

Ας παρατηρήσουμε ότι στο παράδειγμα αυτό το πεδίο ορισμού της f δεν είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 4.2 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής σ'όλο το $(0,1)$, αλλά και πάλι δεν υπάρχει ενιαίο θετικό δ που να ικανοποιεί τον ορισμό 4.1 για κάθε $t \in (0,1)$ (με δεδομένο $\varepsilon > 0$). Παραδείγματος χάριν, αν $t_n = \frac{1}{n}$ και $s_n = \frac{1}{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ τότε, ενώ η διαφορά $|t_n - s_n| = \frac{1}{2n}$ τείνει στο 0, η διαφορά $|f(t_n) - f(s_n)| = n$ δεν μικραίνει.

Σ'αυτό το παράδειγμα το πεδίο ορισμού της f είναι φραγμένο, αλλά όχι κλειστό.

[*Σημείωση* Αν νομίζεις ότι το πρόβλημα με το τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η f δεν είναι φραγμένη, μπορείς να πειραματισθείς με την $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ όπου $g(x) = \sin\frac{1}{x}$.]

Παράδειγμα 4.3 *$f : A \to \mathbb{R}$ με $|f(s) - f(t)| \leq 2|s-t|$ για κάθε $s, t \in A$.*

Εδώ, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $t \in A$, αν διαλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (ανεξάρτητο του t!!), τότε για κάθε $s \in A$ και $|s-t| < \delta$ θα έχουμε $|f(s) - f(t)| < 2\delta = \varepsilon$.

Όταν η «επιτρεπτή μεταβολή» δ εξαρτάται μόνον από το ϵ, είναι δηλαδή *ομοιόμορφη* σ'όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε αυτή λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής*:

Ορισμός 4.2 *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής στο** A αν:*
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε
αν $t, s \in A$ και $|t-s| < \delta$ τότε $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις 4.4 ***(α)*** *Αν μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A τότε βεβαίως είναι συνεχής, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως είδαμε στα πρώτα δύο παραδείγματα.*
(β) *Σε αντίθεση με την απλή συνέχεια, η ομοιόμορφη συνέχεια είναι ολική έννοια, αναφέρεται δηλαδή σ'ολόκληρο το σύνολο A κι όχι σε κάθε σημείο του χωριστά.*
(γ) *Στον ορισμό 4.2, τα s και t έχουν ισοδύναμους ρόλους. Δηλαδή στην ομοιόμορφη συνέχεια υπεισέρχονται κατά κάποιον τρόπο «δύο μεταβλητές».*

Πρόταση 4.5 *Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ του A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρούμε ένα ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ του A με $x_n - y_n \to 0$. Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$

ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $|x_n - y_n| < \delta$, οπότε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Δείξαμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Έστω αντίστροφα ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει τότε $\varepsilon > 0$ ώστε κανένα δ της μορφής $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ να μην είναι κατάλληλο για όλα τα σημεία του A. Θα υπάρχουν δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, σημεία x_n, y_n του A με $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Έχουμε έτσι ένα ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ του A με $x_n - y_n \to 0$ (εφόσον $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ για κάθε n) αλλά $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$. $\square$

Η ομοιόμορφη συνέχεια είναι θεμελιώδης έννοια. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μόνον το ακόλουθο βασικό

Θεώρημα 4.6 *Αν η f είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.*[1]

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $t, s \in [a, b]$ με $|t - s| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\delta > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Η υπόθεσή μας σημαίνει ότι κανένα δ της μορφής $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ δεν είναι κατάλληλο για όλα τα σημεία του $[a, b]$. Υπάρχουν δηλαδή

$$t_n, s_n \in [a, b] \text{ με } |s_n - t_n| < \frac{1}{n} \text{ αλλά } |f(t_n) - f(s_n)| \geq \varepsilon.$$

Έχουμε έτσι δύο ακολουθίες (s_n), (t_n) στο $[a, b]$. Αφού η (s_n) είναι φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass (!) έχει μια υπακολουθία (s_{k_n}) που συγκλίνει, έστω στο s. Εφόσον $a \leq s_{k_n} \leq b$ για κάθε n, έχουμε $a \leq s \leq b$. Θεωρούμε τώρα την αντίστοιχη υπακολουθία (t_{k_n}) της (t_n). Παρατηρούμε ότι

$$|t_{k_n} - s| \leq |t_{k_n} - s_{k_n}| + |s_{k_n} - s| < \frac{1}{k_n} + |s_{k_n} - s| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

άρα η (t_{k_n}) συγκλίνει και αυτή στο s.

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο s, άρα $f(s_{k_n}) \to f(s)$ και $f(t_{k_n}) \to f(s)$, οπότε $|f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \to 0$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την ανισότητα $|f(t_{k_n}) - f(s_{k_n})| \geq \varepsilon$, που ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

[1] Το παράδειγμα 4.3 δείχνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι ομοιόμορφα συνεχής, χωρίς το πεδίο ορισμού της να είναι κλειστό ή φραγμένο.