6 Ολοκληρωσιμότητα

Θεώρημα 6.1 *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Αν η $-f$ είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει για την f (Πρόταση 5.10). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα (αν όχι, θεωρούμε την $-f$).

Κατ'αρχήν έχουμε $f(a) \le f(x) \le f(b)$ για κάθε x άρα η f είναι φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} m_i(f) &= \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = f(t_{i-1}) \\ \text{και} \quad M_i(f) &= f(t_i). \end{aligned}$$

Επομένως

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \quad \text{και} \quad U(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\text{άρα} \quad U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}).$$

Θεωρούμε τώρα μια διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ σε n ίσα τμήματα, οπότε $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ για κάθε i. Τότε

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))\frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.$$

Αρκεί επομένως, αν δοθεί $\varepsilon > 0$, να διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} < \varepsilon$, οπότε για την αντίστοιχη διαμέριση $\mathcal{P}$ θα έχουμε $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$ και το συμπέρασμα έπεται από το Κριτήριο Riemann.

Παράδειγμα 6.2 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (όπου $a > 0$) με $f(x) = \frac{1}{x^2}$.*

Η f είναι φθίνουσα, άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει. Για να το υπολογίσουμε, θεωρούμε μια τυχαία διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$. Αφού $\frac{1}{t_i} \le \frac{1}{t_{i-1}}$ έχουμε

$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i^2}(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_{i-1}^2}(t_i - t_{i-1}) = U(f,\mathcal{P}).$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

άρα

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Αφού η διαμέριση $\mathcal{P}$ είναι τυχαία, και το $\int_a^b f$ είναι ο μόνος αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή για κάθε $\mathcal{P}$, έπεται ότι $\int_a^b f = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Πόρισμα 6.3 *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα μονότονη (δηλαδή υπάρχει διαμέριση $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε η $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ να είναι μονότονη για κάθε i), τότε είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 6.1, το $\int_{xi-1}^{x_i} f$ υπάρχει για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Συνεπώς το $\int_a^b f$ υπάρχει από την Πρόταση 5.7.

Παρατήρηση 6.4 Από το πόρισμα προκύπτει ότι *οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις* (σε κλειστά και φραγμένα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους) είναι ολοκληρώσιμες.

Το πόρισμα όμως δεν εφαρμόζεται σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: Για παράδειγμα η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ όταν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα της μορφής $[0, a]$ (απόδειξη: άσκηση!). Για να δείξουμε ότι *κάθε* συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, θα χρειασθούμε την ισχυρότερη έννοια της *ομοιόμορφης συνέχειας*.

Θεώρημα 6.5 *Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ υπάρχει.*

Απόδειξη Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $s, t \in [a, b]$ και $|s - t| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Αν λοιπόν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση[1] του $[a, b]$ ώστε $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ για κάθε k, τότε για κάθε $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$ θα έχουμε $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, και άρα $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Επομένως

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \square$$

[1] υπάρχει τέτοια διαμέριση, π.χ. σε n ίσα τμήματα, με $n > \frac{b-a}{\delta}$

Θεώρημα 6.6 (Μέσης Τιμής) *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Ειδικότερα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_a^b g > 0$ (αν $\int g = 0$, το συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε ξ). Αν $m = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$ και $M = \sup\{f(t) : t \in [a,b]\}$ έχουμε για κάθε $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} & m \leq f(t) \leq M \\ & mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t) \qquad (g(t) \geq 0) \\ \text{άρα} \qquad & m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g \end{aligned}$$

από το Πόρισμα 5.14. Δηλαδή

$$\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \in [m, M].$$

Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε $\{f(t) : t \in [a,b]\} = [m,M]$, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\,.$$

Παρατήρηση 6.7 Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι στο τελευταίο Θεώρημα η υπόθεση $g \geq 0$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) = x^2$ και $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in [0,1] \\ 2 & \text{αν } x \in (1,2] \end{cases}$ τότε $\int_0^2 g = 1$ και $\int_0^2 fg = \frac{13}{3}$ άρα $\frac{\int fg}{\int g} = \frac{13}{3} > 4$ ενώ $0 \leq f(\xi) \leq 4$ για κάθε $\xi \in [0,2]$.

Θεώρημα 6.8 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη και g ορισμένη και συνεχής στο $[m,M]$ όπου $M=\sup\{f(s): s\in[a,b]\}$ και $m=\inf\{f(s): s\in[a,b]\}$. Τότε η σύνθεση $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Σημείωση Υπάρχουν παραδείγματα που δείχνουν ότι δεν είναι αρκετό η g να είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη Θεωρήματος Θέτουμε $h=g\circ f$. Παρατηρούμε κατ'αρχήν ότι η h είναι φραγμένη. Πράγματι,

$$\|h\|\equiv\sup\{|h(t)|: t\in[a,b]\}=\sup\{|g(s)|: s\in[m,M]\}<\infty$$

αφού η g είναι συνεχής, άρα φραγμένη στο $[m,M]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta>0$ (και μπορώ χωρίς βλάβη της γενικότητας να πάρω $\delta\le\varepsilon$) ώστε αν $x,y\in[m,M]$ και $|x-y|<\delta$ να έχουμε $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$. Αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ τότε

$$U(h,\mathcal{P})-L(h,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n}(M_k(h)-m_k(h))(t_k-t_{k-1}).$$

Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τα διαστήματα σε «καλά» και «κακά»: στα «καλά» διαστήματα η μεταβολή της f να είναι το πολύ δ και (θα διαλέξουμε τη διαμέριση ώστε) τα υπόλοιπα διαστήματα να έχουν «μικρό» συνολικό μήκος. Συγκεκριμένα, έστω $G\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ το σύνολο δεικτών k για τους οποίους το διάστημα $[t_{k-1},t_k]$ έχει την ιδιότητα [2] $|f(s)-f(t)|<\delta$ για κάθε $s,t\in[t_{k-1},t_k]$ και B το σύνολο των υπολοίπων δεικτών.

Αν $k\in G$, τότε για κάθε $s,t\in[t_{k-1},t_k]$ έχουμε $|f(s)-f(t)|<\delta$ άρα $|h(s)-h(t)|=|g(f(s))-g(f(t))|<\varepsilon$ (από τη συνέχεια της g) και συνεπώς $M_k(h)-m_k(h)\le\varepsilon$, οπότε

$$\sum_{k\in G}(M_k(h)-m_k(h))(t_k-t_{k-1})\le\varepsilon\sum_{k\in G}(t_k-t_{k-1})\le\varepsilon(b-a). \tag{1}$$

Αν πάλι $j\in B$, τότε υπάρχουν $s,t\in[t_{j-1},t_j]$ ώστε $|f(s)-f(t)|\ge\delta$ οπότε $M_j(f)-m_j(f)\ge\delta$. Επομένως

$$\sum_{j\in B}(M_j(f)-m_j(f))(t_j-t_{j-1})\ge\delta\sum_{j\in B}(t_j-t_{j-1}).$$

[2] μπορεί βέβαια κανένα διάστημα της $\mathcal{P}$ να μην έχει την ιδιότητα αυτή, οπότε $G=\emptyset$

Εφόσον όμως η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ μπορούμε να επιλέξουμε την $\mathcal{P}$ ώστε $U(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P})<\delta^2$, οπότε

$$\begin{aligned}\delta\sum_{j\in B}(t_j-t_{j-1}) &\le \sum_{j\in B}(M_j(f)-m_j(f))(t_j-t_{j-1})\\ &\le \sum_{k=1}^{n}(M_k(f)-m_k(f))(t_k-t_{k-1})<\delta^2\end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{j\in B}(t_j-t_{j-1})<\delta. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα ότι $M_j(h)-m_j(h)\le 2\sup\{|h(x)|:x\in[m,M]\}=2\|h\|$, έχουμε λοιπόν από τις (1) και (2)

$$\begin{aligned}&U(h,\mathcal{P})-L(h,\mathcal{P})\\ &\quad=\sum_{k\in G}(M_k(h)-m_k(h))(t_k-t_{k-1})+\sum_{j\in B}(M_j(h)-m_j(h))(t_j-t_{j-1})\\ &\quad\le \varepsilon(b-a)+2\|h\|\sum_{j\in B}(t_j-t_{j-1})<\varepsilon(b-a)+2\|h\|\delta\\ &\quad\le \varepsilon(b-a+2\|h\|).\end{aligned}$$

Πόρισμα 6.9 *Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε οι $|f|$ και f^n ($n\in\mathbb{N}$) είναι ολοκληρώσιμες. Αν επιπλέον υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)\ge\delta$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη Έχουμε $|f|=g_1\circ f$, $f^n=g_2\circ f$ και $\frac{1}{f}=g_3\circ f$ όπου g_1,g_2,g_3 οι συνεχείς συναρτήσεις $g_1(x)=|x|$, $g_2(x)=x^n$ ($x\in\mathbb{R}$) και $g_3(x)=\frac{1}{x}$, $x\ge\delta$.