8 Η Λογαριθμική και η Εκθετική Συνάρτηση

8.1 Η Λογαριθμική συνάρτηση

Η συνάρτηση $\phi : t \to \frac{1}{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[1, x]$ (όπου $x > 1$), επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_1^x \frac{1}{t}dt$. Επίσης η ϕ ορίζεται και είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[x, 1]$ όταν $0 < x < 1$ (όχι όμως όταν $x \leq 0$), επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Ορισμός 8.1 *Ορίζουμε τη συνάρτηση*[1] $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *από τη σχέση*

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad (x > 0).$$

Δηλαδή η log είναι η μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί $F'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $F(1) = 0$.

Πρόταση 8.1 (Αλγεβρικές ιδιότητες) *Αν* $x, y > 0$,

$$\log xy = \log x + \log y \tag{1}$$

$$\log(x^q) = q \log x \quad (q \in \mathbb{Q}) \tag{2}$$

ειδικότερα
$$\log(x^{-1}) = -\log x \tag{3}$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y. \tag{4}$$

Απόδειξη Έστω $a > 0$. Αν $f(x) = \log xa$ $(x > 0)$, παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{xa}(xa)' = \frac{a}{xa} = \frac{1}{x}$$

άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = \log x + c$, οπότε $f(1) = \log 1 + c = c$, άρα $c = \log a$ οπότε $\log xa = \log x + \log a$ και η (1) αποδείχθηκε.

Ειδικότερα $\log(x^2) = 2\log(x)$ και (επαγωγικά) $\log(x^n) = n\log(x)$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ισχύει η (2) όταν $q \in \mathbb{N}$.

Η σχέση (3) ισχύει γιατί $0 = \log 1 = \log(xx^{-1}) = \log x + \log(x^{-1})$. Επομένως η (2) ισχύει όταν $q \in \mathbb{Z}$.

---

[1] Καμμιά φορά χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\ln x$ αντί του $\log x$.
Ο «δεκαδικός λογάριθμος» ενός $x > 0$ δίνεται από τον τύπο $\log_{10} x = \dfrac{\log x}{\log 10}$.

Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ έχουμε[2] $n \log(x^{1/n}) = \log((x^{1/n})^n) = \log x$ άρα $\log(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \log x$.

Τώρα η (2) μπορεί να αποδειχθεί γενικά:

$$m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Rightarrow \log(x^{m/n}) = m \log(x^{1/n}) = \frac{m}{n} \log x.$$

Τέλος, η (4) έπεται άμεσα από τις (1) και (3). $\square$

Πρόταση 8.2 *Η συνάρτηση* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι απεριόριστα διαφορίσιμη, γνησίως αύξουσα (άρα 1-1), επί και ικανοποιεί*

$$\lim_{x \to 0+} \log x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty.$$

Απόδειξη (α) Έχουμε $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$ και $\frac{d^m}{dx^m} x^{-1} = (-1)^m m! x^{-(m+1)}$ όταν $m \in \mathbb{N}$ (επαγωγή) άρα

$$\frac{d^n}{dx^n} \log x = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{-1} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$$

οπότε η n-οστή παράγωγος υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Η log είναι γνησίως αύξουσα γιατί $\frac{d}{dx} \log x > 0$ για κάθε $x > 0$.

(γ) Αφού η log είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $\log 2 > \log 1 = 0$.

Συνεπώς $\log 2^n = n \log 2 \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$.

Έπεται ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$: πράγματι για κάθε $M > 0$, υπάρχει $K > 0$ ώστε αν $x > K$ να ισχύει $\log x > M$: αρκεί να διαλέξουμε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\log 2^{n_o} > M$, οπότε για κάθε $x > 2^{n_o} = K$ θα έχουμε $\log x > \log 2^{n_o} > M$.

Ομοίως επειδή $\lim\limits_{n \to +\infty} \log(1/2^n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (-n \log 2) = -\infty$ έπεται ότι $\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$.

(δ) Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η log απεικονίζει το διάστημα $(0, +\infty)$ επί του $(-\infty, +\infty)$: Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $-n \log 2 \leq y \leq n \log 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [\frac{1}{2^n}, 2^n] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log x$. Αφού η f είναι συνεχής και ικανοποιεί $f(\frac{1}{2^n}) = -n \log 2$ και $f(2^n) = n \log 2$, έπεται από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ότι υπάρχει $x \in [\frac{1}{2^n}, 2^n]$ ώστε $f(x) = y$.

[2] Θυμίζουμε ότι, αν $x > 0$, ο αριθμός $x^{1/n}$ είναι εξ ορισμού ο μοναδικός *θετικός* αριθμός y που ικανοποιεί $y^n = x$. Έτσι ορίζονται και ρητές δυνάμεις $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$. Αλλά το σύμβολο x^a δεν έχει (προς το παρόν) νόημα όταν ο a είναι άρρητος. Θα ορισθεί όταν θα ασχοληθούμε με τις *εκθετικές συναρτήσεις* (βλ. Ορισμό 8.3).

Πρόταση 8.3 *Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $f(ab)=f(a)+f(b)$ για κάθε $a,b>0$, τότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=c\log x$.*

Απόδειξη Θα δείξω ότι $f'(x)=f'(1)\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι $f(1)=f(1^2)=2f(1)$ άρα $f(1)=0$. Έστω $x>0$ και $h\in\mathbb{R}$ ώστε $x+h>0$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x+h)=f(x(1+\frac{h}{x}))=f(x)+f(1+\frac{h}{x})$. Επομένως

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h/x)}{h/x} \\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h/x)-f(1)}{h/x} = \frac{1}{x}f'(1). \end{aligned}$$

Άρα, αν $c=f'(1)$, οι συναρτήσεις f και g όπου $g(x)=c\log x$ έχουν ίσες παραγώγους, άρα διαφέρουν κατά μια σταθερά και εφόσον $f(1)=g(1)=0$, είναι ίσες. $\square$

Παρατήρηση 8.4 *Αν $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι ο αριθμός του Euler, έχουμε $\log e=1$.*

Απόδειξη Έστω $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$. Έχουμε $\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt=\log(n+1)-\log n$. Αν $t\in[n,n+1]$, τότε $\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{n}$ οπότε ολοκληρώνοντας

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\le\frac{1}{n} \\ \text{δηλαδή}\quad & \frac{1}{n+1}\le\log(n+1)-\log n=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n} \\ \text{άρα}\quad & \frac{n}{n+1}\le\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\frac{n}{n}. \end{aligned}$$

Εφόσον $\lim\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$. Αλλά η συνάρτηση $\log$ είναι συνεχής, άρα

$$\log e=\log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\,. \qquad \square$$

Παρατήρηση 8.5 *Το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\equiv\gamma$$

υπάρχει.

Δεν είναι γνωστό αν ο αριθμός γ είναι ρητός ή άρρητος! Υπολογίζεται αριθμητικά ότι κατά προσέγγιση ισχύει $\gamma \simeq 0.577$.

Απόδειξη Από τη σχέση

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

αθροίζοντας βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\text{άρα} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{6}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γιατί $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \log(n+1)$. Επομένως αν θέσουμε

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

τότε από την (6) έχουμε

$$a_n \geq \log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} > \log 1 = 0.$$

Επίσης

$$a_n - a_{n+1} = -\log n + \log(n+1) - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

από την (5). Δείξαμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Παρατήρηση 8.6 *Αν ϕ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση* ***που δεν μηδενίζεται πουθενά*** *και η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = \log|\phi(x)| + c.$$

Απόδειξη Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ από τον τύπο $F(x) = \log|x|$. Η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της[3] και $F'(x) = \frac{1}{x}$. Συνεπώς αν ϕ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που δεν μηδενίζεται πουθενά, τότε η $F \circ \phi$ ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη (από τον κανόνα της αλυσίδας) με

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = \frac{1}{\phi(x)}\phi'(x).$$

Επομένως

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} dx = (F \circ \phi)(x) + c = \log|\phi(x)| + c.$$

Ας τονίσουμε ξανά ότι για την ύπαρξη του ολοκληρώματος $\int_a^b \frac{\phi'}{\phi}$ είναι ανάγκη η ϕ **να μη μηδενίζεται πουθενά** στο διάστημα ολοκλήρωσης $[a,b]$ (κι όχι μόνον στα άκρα a και b). Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{xdx}{x^2 - 2}$$

δεν υπάρχει, γιατί η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[1,2]$. Αν πάλι προσπαθήσουμε να την ορίσουμε στο $[1,2]$ θέτοντας $f(\sqrt{2}) = c$, τότε η f δεν θα είναι φραγμένη, και συνεπώς δεν μπορεί να είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 8.7 Ποιό είναι το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό:
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι μη αρνητική, συνεπώς $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Αλλά

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + c$$

άρα

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -(1 - (-1)) = -2 < 0.$$

[3] Πράγματι αν $x > 0$ έχουμε $F(x) = \log(x)$ άρα $F'(x) = \frac{1}{x}$ από τον ορισμό της συνάρτησης log, και αν $x < 0$ έχουμε $F(x) = \log(-x)$ άρα $F'(x) = \log'(-x).(-x)' = \frac{1}{-x}.(-1)$.

Παραδείγματα 8.8

$$(\mathbf{a})\quad \int \log x dx = \int (x)'\,(\log x)\,dx = x\log x - \int x(\log x)'dx$$
$$= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x + c.$$
$$(\mathbf{b})\quad \int \frac{\log x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)\log x dx = \int (\log x)'\log x dx = \frac{(\log x)^2}{2} + c$$

γιατί $\frac{d}{dx}(f(x))^2 = 2f(x)f'(x)$, άρα $\int f(x)f'(x)dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$.

$$(\mathbf{c})\int_a^b \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx$$

όπου $\phi(x) = x^2+2x+5$. Επειδή $\phi(x) = (x+1)^2+4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την Παρατήρηση 8.6 έχουμε

$$\int_a^b \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx = \frac{1}{2}\left[\log(\phi(x))\right]_a^b = \log\sqrt{\frac{b^2+2b+5}{a^2+2a+5}}.$$

$$(\mathbf{d})\quad \int_a^b \frac{1}{x\log x}dx.$$

Εδώ πρέπει η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ να ορίζεται σ'ολόκληρο το $[a,b]$. Πρέπει λοιπόν $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$ (δηλαδή $a > 0$) ώστε να ορίζεται η log, αλλά δεν πρέπει το 1 να ανήκει στο $[a,b]$, γιατί αλλιώς η log θα μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του $[a,b]$. Συνεπώς, για να υπάρχει το ολοκλήρωμα, πρέπει ή $0 < a \le b < 1$ (δηλ. $[a,b] \subseteq (0,1)$) ή $1 < a$ (δηλ. $[a,b] \subseteq (1,+\infty)$). Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε (παρατηρώντας ότι τα $\log b$ και $\log a$ είναι ομόσημα):

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x}dx = \int_a^b \frac{\log' x}{\log x}dx = \left[\log|\log x|\right]_a^b = \log\left(\frac{\log b}{\log a}\right).$$

8.2 Η Εκθετική συνάρτηση

Η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί. Επομένως ορίζεται η αντίστροφή της, που ονομάζεται *η εκθετική συνάρτηση.*

Ορισμός 8.2 *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *ως αντίστροφη της λογαριθμικής:*

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to (0, +\infty) \\ \exp(x) &= \log^{-1}(x) \\ \textit{δηλαδή} \quad \exp x = y &\iff x = \log y. \end{aligned}$$

Πρόταση 8.9 (Αλγεβρικές ιδιότητες)

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1, \ \exp(1) = e \\ \exp(x + y) &= \exp x \exp y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \\ \exp(qx) &= (\exp(x))^q \quad (q \in \mathbb{Q}) \\ \textit{ειδικότερα } \exp(-x) &= (\exp(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Απόδειξη (**a**) Αφού $\exp(\log x) = x$ για κάθε $x > 0$ έχουμε $\exp(0) = \exp(\log 1) = 1, \ \exp(1) = \exp(\log e) = e$.

(**b**) Θέτοντας $u = \exp x$ και $v = \exp y$ έχουμε $x+y = \log u + \log v = \log(uv)$ άρα $\exp(x + y) = \exp(\log(uv)) = uv = \exp x \exp y$.

(**c**) Αν $u = \exp x$ τότε $qx = q \log u = \log(u^q)$ άρα $\exp(qx) = u^q = (\exp x)^q$.

Παρατηρήσεις 8.10 (α) Από την Πρόταση έχουμε $\exp(q) = e^q$ όταν ο q είναι ρητός. Όπως παρατηρήσαμε, το σύμβολο e^x δεν έχει ορισθεί όταν ο x είναι άρρητος, ενώ το σύμβολο $\exp x$ έχει πάντα έννοια. Μπορούμε λοιπόν τώρα **να ορίσουμε** το σύμβολο e^x για κάθε πραγματικό αριθμό x από τη σχέση

$$e^x = \exp x.$$

(β) Η συνάρτηση exp είναι παραγωγίσιμη, γιατί η αντίστροφή της log είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο που δεν μηδενίζεται πουθενά (στο πεδίο ορισμού της). Έχουμε

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Πράγματι, αν $\exp(x) = y$ τότε

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x.$$

Πρόταση 8.11 *Η συνάρτηση* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *είναι απεριόριστα διαφορίσιμη, γνησίως αύξουσα (άρα 1-1), επί και ικανοποιεί*

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$

Απόδειξη Αφού η exp έχει παράγωγο τον εαυτό της, είναι σαφές ότι είναι απεριόριστα διαφορίσιμη.

Αφού $\exp' x = \exp x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η exp είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 (άλλωστε, έχει αντίστροφη). Είναι επί του $(0, +\infty)$ γιατί η αντίστροφή της ορίζεται σ'όλο το $(0, +\infty)$: Αν $y > 0$ τότε υπάρχει ένα $x \in \mathbb{R}$ (μάλιστα, μόνον ένα, το $x = \log y$) ώστε $\exp x = y$.

Τέλος, έχουμε $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ αφού $e > 1$. Επομένως για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x > n$ να ισχύει $\exp x \geq \exp n > M$ (αφού η exp είναι αύξουσα), δηλαδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$. Επειδή $\exp(x) = \frac{1}{\exp |x|}$ όταν $x < 0$, έπεται ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\exp |x|} = 0$.

Πρόταση 8.12 *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι διαφορίσιμη και* $f'(x) = f(x)$ *τότε υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$ *ώστε* $f(x) = c \exp(x)$.

Απόδειξη Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ από τον τύπο $g(x) = \frac{f(x)}{\exp x} = f(x) \exp(-x)$ παρατηρούμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και

$$g'(x) = f'(x) \exp(-x) + f(x) \exp'(-x)(-1) = f(x) \exp(-x) - f(x) \exp(-x) = 0.$$

Συνεπώς η g (αφού ορίζεται σε διάστημα) είναι σταθερή.

Εκθετικές Συναρτήσεις Αν $a > 0$ και $q \in \mathbb{Q}$, παρατηρούμε ότι $a = \exp(\log a)$ και άρα $a^q = (\exp(\log a))^q = \exp(q \log a)$. Το δεξί μέλος της ισότητας αυτής έχει έννοια για κάθε πραγματικό αριθμό q, ρητό ή άρρητο, και μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την συνάρτηση $q \to a^q$ από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$:

Ορισμός 8.3 *Αν* $a > 0$, *ορίζουμε τη συνάρτηση* $x \to a^x$ *από τον τύπο*

$$a^x = \exp(x \log a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη (άρα συνεχής) και

$$\frac{da^x}{dx} = exp'(x \log a) = exp(x \log a)(x \log a)' = exp(x \log a) \log a = a^x \log a.$$

Έπεται ότι, αν $a > 1$, η συνάρτηση $x \to a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι αύξουσα, ενώ αν $a < 1$ είναι φθίνουσα.

Ολοκληρώματα με εκθετικές συναρτήσεις
Εφόσον $\exp' x = \exp x$, έχουμε

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Παράδειγμα

$$\int x^2 \exp(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \phi'(x) \exp(\phi(x)) dx$$

όπου $y = \phi(x) = x^3$, άρα

$$\int x^2 \exp(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \exp(y) dy = \frac{\exp y}{3} + c = \frac{\exp x^3}{3} + c.$$

Παράδειγμα (Ολοκλήρωση κατά μέρη)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int (x)' e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int 1 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.
\end{aligned}$$

Έλεγχος: Αν $f(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$, τότε

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x - 2e^x - 2x e^x + 2e^x = x^2 e^x.$$

Παράδειγμα $\displaystyle\int \frac{1}{1 + e^x} dx.$
Πρώτος τρόπος:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + e^x} &= 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} \\
\text{άρα} \quad \int \frac{1}{1 + e^x} dx &= \int dx - \int \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} dx \\
&= x - \log|1 + e^x| + c
\end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1} \\ \text{άρα} \quad \int \frac{1}{1+e^x}dx &= -\int \frac{(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx \\ &= -\log|e^{-x}+1| + c \end{aligned}$$

Οι δύο απαντήσεις είναι φαινομενικά μόνον διαφορετικές. Πραγματικά, έπεται απευθείας από τις αλγεβρικές ιδιότητες των log και exp ότι

$$x - \log|1+e^x| = \log(e^x) + \log\frac{1}{1+e^x} = \log\frac{e^x}{1+e^x} = \log\frac{1}{e^{-x}+1} = -\log|e^{-x}+1|.$$

Παράδειγμα Αν a, b είναι δυο πραγματικές σταθερές, θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$C(x) = \int e^{ax}\cos bx dx \quad \text{και} \quad S(x) = \int e^{ax}\sin bx dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} aC(x) &= \int ae^{ax}\cos bx dx = \int (e^{ax})'\cos bx dx \\ &= e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}(\cos bx)'dx = e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}(-b\sin bx)dx \\ &= e^{ax}\cos bx + bS(x) + c_1. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} aC(x) - bS(x) &= e^{ax}\cos bx + c_1, \\ \text{ομοίως} \quad bC(x) + aS(x) &= e^{ax}\sin bx + c_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Λύνοντας τώρα το σύστημα (7) ως προς $C(x)$ και $S(x)$ βρίσκουμε εύκολα

$$C(x) = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c_3, \qquad S(x) = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c_4.$$