9 Αναπτύγματα Taylor

Πολυωνυμικές συναρτήσεις Μία πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

δηλαδή ένας γραμμικός συνδυασμός των (γραμμικά ανεξάρτητων) συναρτήσεων $f_0, f_1, \ldots,$ όπου $f_n(x) = x^n$. Επομένως δύο πολυώνυμα[1] p, q είναι ίσα (δηλ. $p(x) = q(x)$ για κάθε[2] $x \in \mathbb{R}$) αν και μόνον αν έχουν τους ίδιους συντελεστές. Όμως οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες, και μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές συναρτήσει των παραγώγων: Πράγματι,

$$\begin{array}{rll}
p(x) = & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n & \Rightarrow \; p(0) = a_0, \\
p'(x) = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} & \Rightarrow \; p'(0) = a_1 \\
p''(x) = & 2a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} & \Rightarrow \; p''(0) = 2a_2 \\
\vdots & & \\
p^{(k)}(x) = & k! a_k + \cdots + n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k} & \Rightarrow \; p^{(k)}(0) = k! a_k
\end{array}$$

άρα

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, \; a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \;\; (= 0 \;\; \text{όταν } k > n).$$

Επομένως,

Παρατήρηση 9.1 *Κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n γράφεται*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν

$$p^{(k)}(0) = q^{(k)}(0) \;\; \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

[1] Στον Απειροστικό Λογισμό, με τον όρο «πολυώνυμο» εννοούμε «πολυωνυμική συνάρτηση».

[2] Ας θυμηθούμε ότι αν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις p, q βαθμού n ικανοποιούν $p(x) = q(x)$ για τουλάχιστον $n + 1$ τιμές του x, τότε είναι ίσες, γιατί αν η εξίσωση $p(x) - q(x) = 0$ έχει περισσότερες από n (διαφορετικές) ρίζες, τότε $p(x) - q(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κάθε συνάρτηση με τύπο $q(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$ είναι πολυώνυμο, γιατί είναι γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων g_k όπου $g_k(x) = (x-a)^k$. Αν q είναι πολυώνυμο και $a \in \mathbb{R}$, υπάρχουν πάντα κατάλληλοι συντελεστές $b_k \in \mathbb{R}$ ώστε $q(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$ (Απόδειξη: Άσκηση). Όπως προηγουμένως, παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή k φορές και θέτοντας $x = a$, βρίσκουμε

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N},\ b_k = \frac{q^{(k)}(a)}{k!} \ \ (= 0 \ \text{ όταν } k > n).$$

Επομένως,

Παρατήρηση 9.2 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, κάθε πολυώνυμο q γράφεται*

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Συνεπώς δύο πολυώνυμα p, q είναι ίσα αν και μόνον αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Πολυώνυμα Taylor Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(c,d) \subseteq \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι σε κάποιο σημείο $a \in (c,d)$ οι παράγωγοι $f^{(k)}(a)$ υπάρχουν για $k = 1, \ldots, n$.

Ορισμός 9.1 *Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ (ή $T_{n,a}$, όταν η f εννοείται) βαθμού n για την f στο σημείο a ορίζεται από τον τύπο*

$$\begin{aligned} T_{n,f,a}(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (f^{(0)} \equiv f). \end{aligned}$$

Όταν $a = 0$, το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ ονομάζεται επίσης πολυώνυμο MacLaurin.

Παρατηρούμε ότι

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T'_{n,a}(a) = f'(a), \ldots,\ T^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Συνεπώς (από την Παρατήρηση 9.2), κάθε άλλο πολυώνυμο που ικανοποιεί αυτές τις $n+1$ ισότητες θα είναι ίσο με το $T_{n,a}$:

Πρόταση 9.3 (Συμπεριφορά στο σημείο a) *Το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n που ικανοποιεί τις $n+1$ ισότητες*

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Γεωμετρικά, το γράφημα του πολυωνύμου Taylor $T_{1,f,a}$ είναι η εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(a, f(a))$. Γενικότερα, το γράφημα του πολυωνύμου Taylor $T_{n,f,a}$ περνάει από το σημείο $(a, f(a))$ και έχει την ίδια εφαπτόμενη με το γράφημα της f.

Παραδείγματα 9.4 (ι) Αν $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$, επειδή $\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ και $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ βρίσκουμε επαγωγικά

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα } f^{(2n)}(0) = 0,\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

συνεπώς

$$T_{2n+1,0}(x) = T_{2n+2,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ιι) Έστω $f(x) = \log(1+x)$ $(x > -1)$. Επειδή $\log^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{t^k}$ έχουμε $f^{(k)}(0) = \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ επομένως

$$T_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη συμπεριφορά της συνάρτησης $T_{n,a}$ (για σταθερό $n \in \mathbb{N}$) *κοντά στο σημείο a*.

Παρατηρούμε ότι εφόσον $T_{n,a}(a) = f(a)$ και οι συναρτήσεις $T_{n,a}$ και f είναι συνεχείς στο a, το όριο $\lim_{x\to a}(f(x) - T_{n,a}(x))$ υπάρχει και είναι 0.

Πόσο «γρήγορα» όμως τείνει αυτή η διαφορά στο 0;

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Έχουμε

$$T_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{άρα} \quad \frac{f(x) - T_{1,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$
$$\text{άρα} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{1,a}(x)}{x-a} = 0$$

από τον ορισμό της $f'(a)$.

Δηλαδή η διαφορά $|f(x) - T_{1,a}(x)|$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a «πιό γρήγορα» από την διαφορά $|x-a|$.

Θα δείξουμε ότι η διαφορά $|f(x) - T_{2,a}(x)|$ τείνει στο 0 καθώς το x τείνει στο a «πιό γρήγορα» από την διαφορά $(x-a)^2$, με την έννοια ότι το όριο

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{2,a}(x)}{(x-a)^2} \text{ υπάρχει και είναι } = 0.$$

Γενικότερα, θα δείξουμε ότι

Πρόταση 9.5 (Συμπεριφορά κοντά στο σημείο a)
Αν η $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο a, τότε το όριο

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} \text{ υπάρχει και είναι } = 0.$$

Απόδειξη Το κλειδί βρίσκεται στην
Παρατήρηση Αν το $T_{n,f,a}$ υπάρχει, τότε

$$T'_{n,f,a}(x) = T_{(n-1),f',a}(x).$$

Πράγματι, παραγωγίζοντας την

$$T_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

έχουμε

$$T'_{n,f,a}(x) = 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = T_{(n-1),f',a}(x).$$

Αποδεικνύουμε τώρα την Πρόταση με επαγωγή στο n:

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η Πρόταση ισχύει για $n = 1$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-T_{1,g,a}(x)}{(x-a)} = 0$ για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση g, άρα και για την f'.

Επομένως $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{1,f',a}(x)}{(x-a)} = 0$. Όμως μόλις παρατηρήσαμε ότι $T_{1,f',a} = T'_{2,f,a}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - T_{2,f,a}(x)) = 0$ και $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^2 = 0$, ενώ $(x-a)^2 \neq 0$ όταν $x \neq a$, από τον κανόνα L'Hospital (Θεώρημα 1.23) προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{2,f,a}(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T'_{2,f,a}(x)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{1,f',a}(x)}{(x-a)} = 0.$$

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο[3] γίνεται το επαγωγικό βήμα. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε συνάρτηση g για την οποία υπάρχει η $g^{(n-1)}(a)$ ισχύει ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_{n-1,g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0,$$

εφαμόζοντας την υπόθεση για $g = f'$ και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση έχουμε ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T'_{n,f,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{(n-1),f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

οπότε από τον κανόνα L'Hospital έχουμε ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^{n}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T'_{n,f,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{n}\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{(n-1),f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πρόταση 9.6 *Αν η $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο a, τότε το $T_{n,f,a}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο p βαθμού n που ικανοποιεί*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^{n}} = 0\,.$$

Απόδειξη Δείξαμε ότι το πολυώνυμο $T_{n,f,a}$ ικανοποιεί την υπόθεση. Αν το πολυώνυμο p την ικανοποιεί επίσης, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x) - T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^{n}} = 0.$$

Γράφοντας $p(x) - T_{n,f,a}(x) = q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$ έχουμε για κάθε $0 \le k \le n$,

$$\frac{q(x)}{(x-a)^k} = \frac{q(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-k}$$

άρα

$$\lim_{x\to a} \frac{q(x)}{(x-a)^k} = 0 \qquad (1)$$

[3] Η χωριστή απόδειξη της περίπτωσης $n = 2$ δεν είναι βέβαια αναγκαία, έγινε μόνο για καλύτερη κατανόηση.

Θέτοντας $k = 0$ βρίσκουμε $q(a) = \lim_{x \to a} q(x) = 0$ άρα $b_0 = 0$. Τότε όμως

$$\frac{q(x)}{x-a} = \frac{b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n}{(x-a)} = b_1 + b_2(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^{n-1},$$

οπότε παίρνοντας όριο καθώς $x \to a$ βρίσκουμε $b_1 = 0$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από $n+1$ βήματα βρίσκουμε $b_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$, άρα $p = T_{n,f,a}$. $\square$

Υπόλοιπο Taylor Ενδιαφερόμαστε τώρα να μελετήσουμε την συμπεριφορά των πολυωνύμων Taylor $T_{n,f,a}$ καθώς ο βαθμός n μεγαλώνει. Ειδικότερα, μας ενδιαφέρει πότε τα πολυώνυμα αυτά «πλησιάζουν» την f, κάτω από ποιές προϋποθέσεις και με ποιά έννοια. Βέβαια ξέρουμε ότι στο σημείο a ταυτίζονται ($T_{n,f,a}(a) = f(a)$ για κάθε n), τι γίνεται όμως σε άλλα σημεία x του πεδίου ορισμού της f; Πώς συμπεριφέρεται η διαφορά $f(x) - T_{n,f,a}(x)$ καθώς $n \to \infty$;

Για το σκοπό αυτό εισάγουμε το **υπόλοιπο Taylor τάξης n για την f στο σημείο a**: Είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ίδιο με την f, δηλαδή το διάστημα (c,d) που ορίζεται από τον τύπο

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x) \qquad x \in (c,d).$$

Θεώρημα 9.7 (Taylor) *Έστω $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}(t)$ για κάθε $t \in (c,d)$ και έστω $a \in (c,d)$. Τότε, για κάθε $x \in (c,d)$:*

(α) (Μορφή Cauchy) *Υπάρχει t μεταξύ των a και x ώστε*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

(β) (Μορφή Lagrange) *Υπάρχει s μεταξύ των a και x ώστε*

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(γ) (Ολοκληρωτική μορφή) *Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη,*

$$R_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Απόδειξη Γράφουμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς ένα «κινητό» κέντρο t:

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x) \tag{2}$$

Σταθεροποιούμε τα σημεία a, x **και το** n και θεωρούμε το $R_{n,t}(x)$ ως συνάρτηση του t. Ορίζουμε δηλαδή

$$S(t) = R_{n,t}(x), \qquad t \in (c,d).$$

Αν επίσης θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$g_k(t) = (x-t)^k, \qquad t \in (c,d),\ k = 1, 2, \ldots$$

τότε η (2) γράφεται

$$f(x) = f(t) + f'(t)g_1(t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t) + S(t) \quad (t \in (c,d)). \tag{3}$$

Ισχυρισμός *Η συνάρτηση* S *είναι παραγωγίσιμη στο* (c,d) *και*

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{4}$$

Απόδειξη Ισχυρισμού: Από την (3) φαίνεται ότι η S είναι παραγωγίσιμη, αφου οι f και $f^{(k)}g_k$ παραγωγίζονται στο (c,d). Για να βρούμε την τιμή της παραγώγου, παραγωγίζουμε την σχέση (3) (ως προς t):

$$\frac{d}{dt}f(x) = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}\left(f'(t)g_1(t)\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}g_n(t)\right) + \frac{d}{dt}S(t).$$

Έχουμε όμως $\frac{d}{dt}f(x) = 0$, $\frac{d}{dt}(f'(x)g_1(t)) = -f'(t) + f''(t)(x-t)$ και γενικότερα για $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}g_k(t)\right) &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}g_k'(t) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}g_k(t)\\ &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(-k(x-t)^{k-1}) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\\ &= -\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\end{aligned}$$

Επομένως

$$0 = f'(t) + (-f'(t) + f''(t)(x-t)) + \left(-f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) +$$
$$\ldots + \left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right) + S'(t)$$
$$\Longrightarrow S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Η Μορφή Cauchy για το υπόλοιπο Taylor έπεται τώρα από τον Ισχυρισμό εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης τιμής στη συνάρτηση S, αν παρατηρήσουμε ότι

$$S(t) = R_{n,f,t}(x) \quad \text{άρα} \quad S(x) = 0 \text{ και } S(a) = R_{n,f,a}(x):$$

Υπάρχει t μεταξύ των a και x ώστε

$$\frac{S(x)-S(a)}{x-a} = S'(t) \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{-R_{n,a}(x)}{x-a} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
$$\text{άρα} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)\,.$$

Η Μορφή Lagrange έπεται από τον Ισχυρισμό εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy (Θεώρημα 1.21) στις συναρτήσεις S και g_{n+1} (όπου $g_{n+1}(t) = (x-t)^{n+1}$): Υπάρχει s μεταξύ των a και x ώστε

$$(S(x) - S(a))g'_{n+1}(s) = (g_{n+1}(x) - g_{n+1}(a))S'(s)$$

δηλαδή

$$(0 - R_{n,a}(x))(-(n+1)(x-s)^n) = (0 - (x-a)^{n+1})\left(-\frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n\right)$$
$$\text{άρα} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Τέλος,

Η Ολοκληρωτική μορφή για το υπόλοιπο Taylor έπεται από τη σχέση

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

εφαρμόζοντας το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα, όταν η $f^{(n+1)}$, άρα και η S', είναι ολοκληρώσιμη: Έχουμε

$$-R_{n,a}(x) = S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t)dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt\,. \qquad \square$$

Παραδείγματα

(α) $f(x) = \exp x$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Lagrange: Επειδή $f^{(k)}(x) = \exp x,\ k \in \mathbb{N}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει s μεταξύ 0 και x ώστε

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp s}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Το υπόλοιπο:

$$|R_{n,0}(x)| = \frac{e^s |x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ικανοποιεί} \quad \lim_{x \to 0} |R_{n,0}(x)| = 0$$

για κάθε[4] $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$\boxed{\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.}$$

(β) $f(x) = \sin x$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Lagrange: Επειδή $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει s μεταξύ 0 και x ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 + \frac{\sin(s + \frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$$

Αλλά $T_{2n+1,f,0} = T_{2n+2,f,0}$ (αφού $f^{(2n+2)}(0) = 0$), οπότε το υπόλοιπο

$$|R_{2n+1,0}(x)| = |R_{2n+2,0}(x)| = \left| \frac{\sin(s + \frac{2n+3}{2}\pi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \le \frac{1}{(2n+3)!} \left| x^{2n+3} \right|$$

άρα το $R_{k,0}(x)$ τείνει στο 0 καθώς $k \to \infty$ και επομένως έχουμε

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.}$$

---

[4] Γνωρίζουμε (π.χ. κριτήριο λόγου) ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

(γ) $f(x) = \arctan x$.

Υπενθύμιση: Η συνάρτηση

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad \text{όπου } g(s) = \tan s$$

είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφή της ονομάζεται «τόξο εφαπτομένης» και συμβολόζεται arctan.

Επειδή $g'(s) = \dfrac{1}{\cos^2 s} > 0$ για κάθε $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η αντίστροφή της, $g^{-1} = \arctan x$, έχει παράγωγο σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και, αν $x = g(s)$,

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(s)} = \cos^2 s = \frac{1}{1 + \tan^2 s} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + c$$

όπου $c = \arctan(0)$. Αλλά $g(0) = 0$ άρα $g^{-1}(0) = g^{-1}(g(0)) = 0$, δηλαδή τελικά

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Αντί να παραγωγίσουμε n φορές την arctan στο 0, είναι ευκολότερο να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα 1 και $1 + t^2$ οπότε για κάθε n βρίσκουμε[5]

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

ολοκληρώνοντας

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

---

[5]Αλλιώς: το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο $-t^2$ είναι

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)}.$$

Επομένως αν

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

τότε έχουμε

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

οπότε, όταν $|x| \leq 1$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, δηλαδή

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots, \qquad |x| \leq 1.}$$

(δ) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R} : \ f(x) = \log(1+x)$. Από τη σχέση

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (t \neq -1)$$

και τον ορισμό της συνάρτησης log έχουμε, για κάθε $x > -1$,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

οπότε αν ονομάσουμε $F_n(x)$ τη διαφορά $\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$ (δεν έχουμε ακόμη διαπιστώσει[6] ότι $F_n(x) = R_{n,0}$) έχουμε

$$F_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt\,.$$

Όταν $x > 0$, έχουμε

$$|F_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^n dt \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

[6]Από τις ανισότητες που ακολουθούν έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{F_n(x)}{x^n}$ υπάρχει και είναι 0, άρα από την Πρόταση 9.6 πράγματι έχουμε $F_n(x) = R_{n,0}(x)$.

και όταν $-1 < x < 0$,

$$\begin{aligned}|F_n(x)| &= \left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| = \left|\int_x^0 \frac{t^n}{1+t}dt\right| \\ &\leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n dt = \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,.\end{aligned}$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες προκύπτει ότι για κάθε x με $-1 < x \leq 1$ το όριο

$$\lim_{x\to 0} F_n(x) \quad \text{υπάρχει και είναι } \ 0,$$

άρα

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{όταν } \ -1 < x \leq 1.}$$

Ειδικότερα

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (αφού η ακολουθία $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ δεν τείνει στο 0) και για $x = -1$ επίσης αποκλίνει (αρμονική σειρά).

(ε) Το διωνυμικό ανάπτυγμα Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R} : \ f(x) = (1+x)^a$$

(υπενθυμίζουμε ότι η f ορίζεται[7] από τον τύπο $f(x) = \exp(a\log(1+x))$.) Έχουμε

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x) &= a(a-1)\ldots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \\ f^{(k)}(0) &= a(a-1)\ldots(a-k+1).\end{aligned}$$

Επομένως

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k$$

[7]Όταν $a > 0$ το όριο $\lim_{x\to -1} f(x)$ υπάρχει και είναι 0, αφού $\log(1+x) = y \to -\infty$ και $\exp(ay) \to 0$, άρα το πεδίο ορισμού της f μπορεί να επεκταθεί στο $[-1, \infty)$ θέτοντας $f(-1) = 0$.

όπου

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}.$$

Όταν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k > a$, οπότε

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k$$

όπως ήδη γνωρίζουμε.

Υποθέτουμε τώρα ότι $a \notin \mathbb{N}$.

Θα αποδείξουμε ότι, όταν $|x| < 1$ η σειρά Taylor συγκλίνει στο $(1+x)^a$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Cauchy του υπολοίπου: υπάρχει t μεταξύ[8] 0 και x ώστε

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n x = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}(1+t)^{a-(n+1)}(x-t)^n x \\ &= \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{a-1} x \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ όταν $|x| < 1$, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leq |x| \quad \text{όταν} \;\; |x| < 1. \tag{5}$$

Πράγματι, όταν $0 \leq t \leq x$ έχουμε

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{x-t}{1+t} \leq \frac{x}{1+t} \leq x = |x|.$$

Όταν $-1 < x \leq t \leq 0$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_x : [x, 0] \to \mathbb{R}$ με

$$g_x(t) = \frac{x-t}{1+t} = \frac{x+1}{t+1} - 1$$

η οποία είναι φθίνουσα (αφού $x+1>0$) άρα έχει μέγιστη τιμή την $g_x(x) = 0$ και ελάχιστη την $g_x(0) = x$ οπότε για κάθε $t \in [x, 0]$ έχουμε $g_x(t) \leq 0$ άρα

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = -g_x(t) \leq -g_x(0) = -x = |x|.$$

[8] το t εξαρτάται εν γένει και από το n

Ο ισχυρισμός (5) αποδείχθηκε.

Έχουμε επομένως

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{a-1} x \right| \\
&\le \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n \right| \left| (1+t)^{a-1} x \right| \le \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n \right| M(x)
\end{aligned}
$$

όπου[9] $M(x) = |x| \max(1, (1+x)^{a-1})$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$
y_n \equiv \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n \right| \to 0
$$

καθώς $n \to \infty$. Έχουμε

$$
\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left| \frac{a(a-1)\dots(a-n)(a-(n+1))}{a(a-1)\dots(a-n)} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \left| \frac{a-n+1}{n+1} x \right| .
$$

Για κάθε $n \ge a-1$ έχουμε $|a-(n+1)| = n+1-a$, άρα

$$
\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left| \frac{a-(n+1)}{n+1} x \right| = \frac{n+1-a}{n+1} |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| < 1
$$

και συνεπώς $y_n \to 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι, όταν $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Έτσι έχουμε τελικά:

$$
\boxed{(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \text{όταν } -1 < x < 1.}
$$

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου). Για $|x| = 1$ η συμπεριφορά εξαρτάται από την τιμή του a. Για παράδειγμα, όταν $a = -1$, η σειρά αποκλίνει και στα δύο άκρα (γεωμετρική σειρά με λόγο x). Αποδεικνύεται ότι όταν $a = -1/2$ η σειρά συγκλίνει για $x = 1$ και αποκλίνει για $x = -1$, και όταν $a = 1/2$ (και γενικότερα όταν $a > 0$), η σειρά συγκλίνει και στα δύο άκρα.

Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου και Ε. Γιαννακούλια, Θεώρημα 26.16.

[9] Όταν $-1 < x < 0$ έχουμε $0 < 1+x \le 1+t < 1$ άρα

$$
\begin{aligned}
a-1 > 0 &\Rightarrow (1+x)^{a-1} \le (1+t)^{a-1} \le 1 = \max(1, (1+x)^{a-1}) \\
a-1 < 0 &\Rightarrow 1 \le (1+t)^{a-1} \le (1+x)^{a-1} = \max(1, (1+x)^{a-1})\,.
\end{aligned}
$$

Όταν $0 \le x < 1$ έχουμε $1 \le 1+t \le 1+x$ και η ανισότητα $(1+t)^{a-1} \le \max(1, (1+x)^{a-1})$ προκύπτει με τον ίδιο τρόπο.