Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

1η Σειρά Ασκήσεων - Ακολουθίες

1. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\limsup a_n = 0$.

(β) Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\limsup a_n = 0 \iff \lim a_n = 0 \ .$$

2. Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(α) Δείξτε ότι ισχύει $\limsup a_n \leqslant s$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) για την οποία ισχύει $\limsup a_n < s$.

(γ) Δείξτε ότι, αν ισχύει $a_n \neq s$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\limsup a_n = s$.

3. Δίνονται οι ακουλουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ και $b_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών $(a_n), (b_n)$ και $(a_n + b_n)$ και παρατηρήστε ότι

$$\liminf a_n + \liminf b_n < \liminf(a_n + b_n) < \limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n \ .$$

4. Δίνεται ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = 2, \ \lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = 4 \ \text{και} \ \lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = 5.$$

(α) Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη.
(β) Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_0 = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 3k, \ \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}, \ \ A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 3k+1, \ \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 3k+2, \ \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}\}.$$

Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία της (a_n) με $\lim a_{k_n} = \ell$, για κάποιον $\ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ένα ακριβώς από τα παρακάτω:
(i) Για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_0$ ή (ii) για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_1$ ή (iii) για κάθε $n \geq n_0$, $k_n \in A_2$
και συμπεράνατε ότι $\ell \in \{2, 4, 5\}$.

5. (α) Δίνεται αύξουσα και φραγμένη ακολουθία (a_n) και μια υπακολουθία της (a_{k_n}). Δείξτε ότι

$$\sup\{a_{k_n} : \ n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(β) Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$, δείξτε ότι $a_n \to a$.

6. (α) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $2^n a_{k_n} \to 0$.

(β) Αν $a_n \to 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ να συγκλίνει.

7. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, αλλά η (a_n) να αποκλίνει.

(β) Αν για την ακολουθία (b_n) ισχύει $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι η (b_n) συγκλίνει.

(γ) Ορίζουμε την ακολουθία (a_n) ως εξής: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ και

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

8. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0 \ ,$$

αλλά η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy .