Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

2η Σειρά Ασκήσεων - Σειρές

1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+(\log k)^2} \qquad (\beta)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^p},\ \ p>0$$

$$(\gamma)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \qquad (\delta)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^k} \qquad (\varepsilon)^{\star}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

$$(\sigma\tau)\ \sum_{k=1}^{\infty} k\sin\left(\frac{1}{k^3}\right) \qquad (\zeta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos(\frac{1}{k})\right) \qquad (\eta)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^a},\ \ a\in\mathbb{R}$$

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.
(β) Αν $b_k \geq 0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$.

3. Δίνονται ακολουθίες (a_k), (b_k) με $a_k\geq 0$ και $b_k\geq 0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$.
(α) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2+b_k^2\right)^{1/2}$.
(β) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$.
(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$.

4. Δίνονται ακολουθίες (a_k), (b_k) με $a_k>0$, $b_k>0$ και με την ιδιότητα $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

5. Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δείξτε ότι για την υπακολουθία (s_{2^n}) της (s_n) ισχύουν οι εκτιμήσεις: $\frac{n}{2}+1 < s_{2^n} < n+1$.

6. (α) Δίνεται ακολουθία (a_k) με $a_k>0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και (a_k) φθίνουσα. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), βρείτε εκτιμήσεις (άνω και κάτω φράγματα) για το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p>1$. Δείξτε ειδικότερα ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

7. Είδαμε ότι $e=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
(α) Χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση του e και συγκρίνοντας την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ με κατάλληλη γεωμετρική σειρά, δείξτε ότι $e<3$.
(β) Δείξτε ακόμα ότι, αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα αυτής της σειράς, ισχύει η ανισότητα: $0<e-s_n<\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$.

8. (*Αναδιατάξεις σειρών*) Είδαμε ότι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ συγκλίνει. Έστω s το άθροισμά της.
(α) Δείξτε ότι $s > 0$.
(β) Θεωρούμε τώρα την εξής αναδιάταξη των όρων της παραπάνω σειράς:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

(όπου το μοτίβο είναι ότι ένας θετικός όρος ακολουθείται από δύο αρνητικούς.)
Αποδείξτε ότι το νέο άθροισμα ισούται με $\frac{s}{2}$.
Συμπέρασμα: Το άθροισμα μιας σειράς άπειρων όρων μπορεί να αλλάξει αν αναδιατάξουμε τους όρους της.

9.** Δίνεται ακολουθία (a_k). Αν $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση, τότε η ακολουθία (b_k) με $b_k = a_{\sigma(k)}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, λέγεται αναδιάταξη της (a_k). Αποδείξτε ότι: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε και για κάθε αναδιάταξη (b_k) της (a_k) η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει απολύτως και ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$