Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019 - 20

4η Σειρά Ασκήσεων - Ολοκλήρωμα Riemann

1. (α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) = c \neq 0$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(β) Έστω $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $g(t_i) \neq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και $g(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)dx = 0$.

(γ) Δίνονται συναρτήσεις $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη και η ψ διαφέρει από την ϕ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων. Δείξτε ότι και η ψ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx$.

2. Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και αν ναι, βρείτε το ολοκλήρωμά της:

(α) $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \notin \{1, \frac{1}{2}, \ldots\}$.

(β) $f(x) = x$, αν $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ (όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών).

3. (α) Δείξτε ότι, αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και έχει την ιδιότητα ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, είναι σωστό ότι η g είναι κατ' ανάγκη ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;

4. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $A \subseteq [a,b]$. Δείξτε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\} = \sup\{f(x) : x \in A\} - \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του ολοκληρώματος και το κριτήριο του Riemann (χωρίς το Θεώρημα 4.4.8), αποδείξτε ότι:

(i) η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(ii) η συνάρτηση f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(γ) Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, ισχύει κατ' ανάγκη ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;

(δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, να αποδείξετε ότι και οι συναρτήσεις $\phi = \max\{f,g\}$ και $\psi = \min\{f,g\}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ (όπου $\forall x \in [a,b]$ $\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και $\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$).
(*Υπόδειξη:* Για κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι $\max\{\gamma, \delta\} = \frac{1}{2}(\gamma + \delta + |\gamma - \delta|)$ και ανάλογος τύπος ισχύει για το $\min\{\gamma, \delta\}$.)

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν βαθμωτές (κλιμακωτές) συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και τέτοιες ώστε

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon \ .$$

6. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann, αποδείξτε ότι, αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a) \ .$$

(β) Εξετάστε αν το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) είναι σωστό στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη, αλλά όχι κατ' ανάγκη συνεχής συνάρτηση.

7. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μία ακολουθία (a_n) ως εξής: $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$.

8. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ισχύει

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\ dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλη διαμέριση του διαστήματος $[\frac{1}{n}, 1]$.

(β) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\ dx = +\infty.$$

9*. Δίνεται διάστημα $[a, b]$ και συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο

$$A_\varepsilon = \{x \in [a, b] : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Έστω

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι το σύνολο A είναι το πολύ αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο) και ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε $x \notin A$ και ασυνεχής σε κάθε $x \in A$.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$.