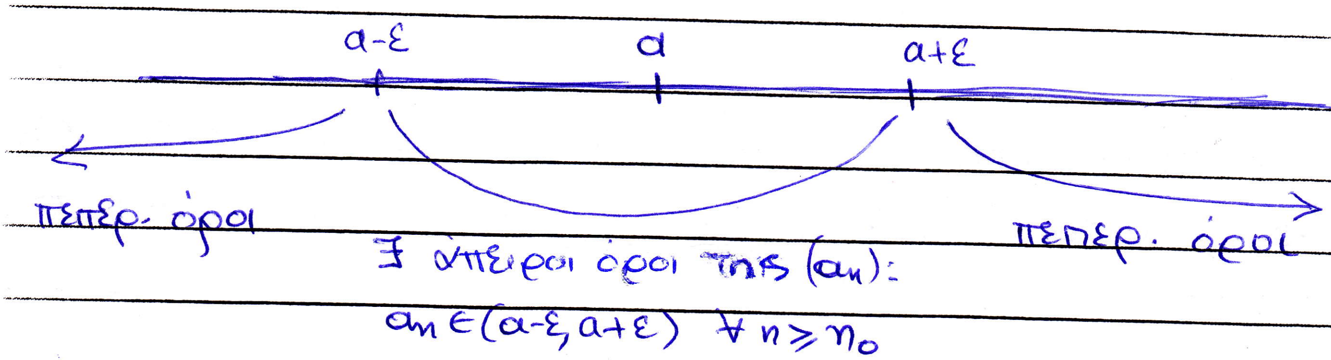
ΜΑΘΗΜΑ 3

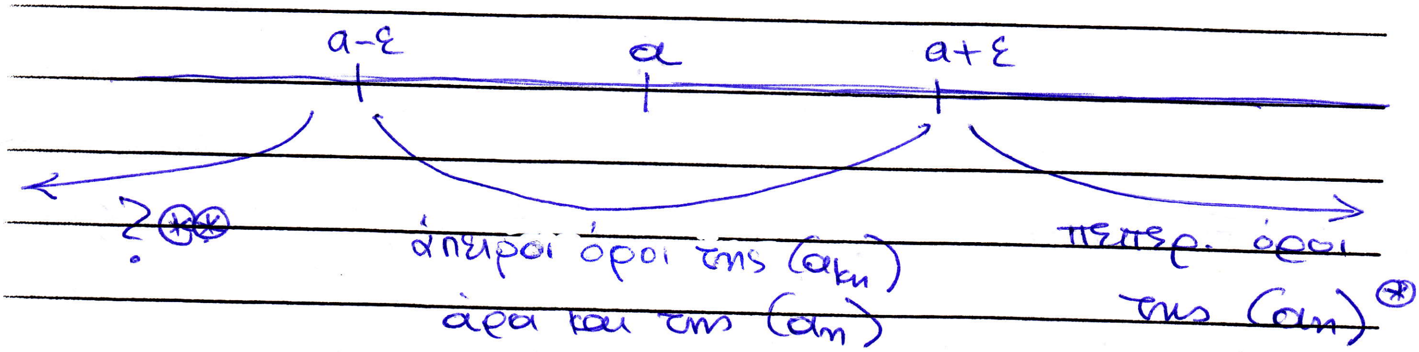
ΑΝΩΤΕΡΟ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ

Έστω (a_n) φραγμένη. Παρατηρούμε ότι:

(1) Αν (a_n) συγκλίνουσα και $a=\lim a_n \in \mathbb{R}$, τότε $\forall \varepsilon>0$:



(2) Αν $a=\limsup a_n = \sup K$, τότε $\forall \varepsilon>0$:
↳ όριο μιας (a_{k_n})

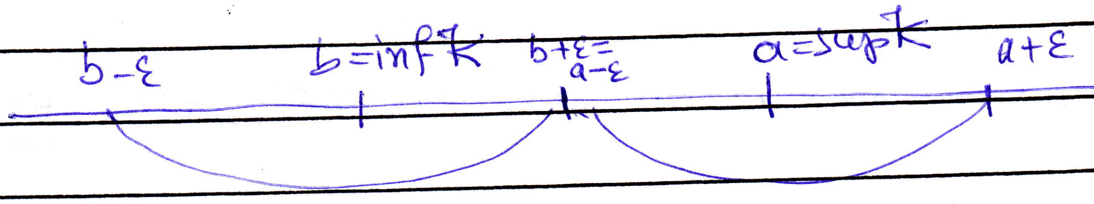


(*) αν (a_n) είχε άπειρους όρους $> a+\varepsilon$, αυτοί θα ήταν (a_{λ_n}) υπακολουθία, άρα ακολουθία (φραγμ.., αφού (a_n) φραγμ.) $\overset{BW}{\Longrightarrow}$ $\exists$ υπακολουθία της υπακολουθίας $(a_{\lambda_{\mu_n}})$ με $a_{\lambda_{\mu_n}} \to \xi \geq a+\varepsilon \to \xi \in K$ και $\xi > a = \sup K$, άτοπο.

(**) Αριστερά του $\alpha-\varepsilon$ δεν ξέρουμε:

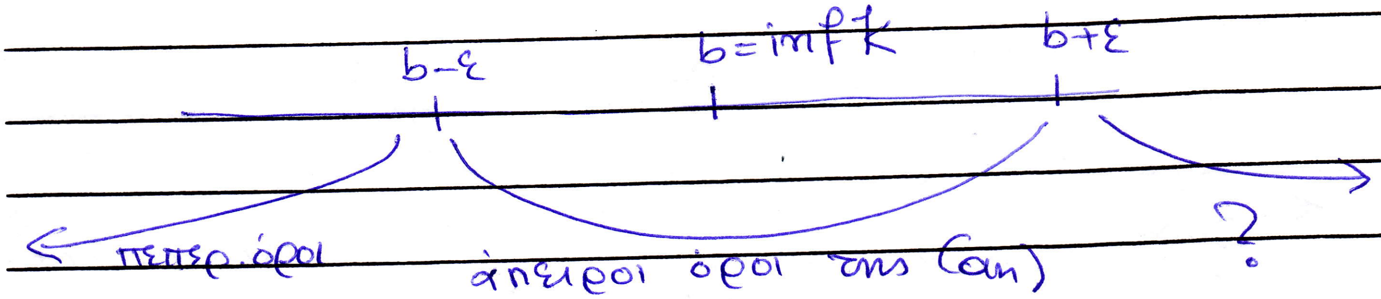
(i) Αν $a=\lim a_n \Rightarrow$ αριστερά υπάρχουν πεπερ. όροι της (a_n), όπως στο (1).

(ii) Αν $\exists\, b=\liminf a_n = \inf K$ με $b<a$



Τότε παίρνοντας $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$ έχω άπειρους όρους της (a_n) μέσα στο $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ δηλ. μικρότερους του $b+\varepsilon=a-\varepsilon$.

(3) Παρόμοια με το (2), αν $b=\liminf a_n$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$:



<u>ΘΕΩΡ.</u> Έστω (a_n) φραγμένη, $x\in\mathbb{R}$. Τότε:

(1) $x\le \limsup a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid x-\varepsilon<a_n\}$ άπειρο.

(2) $x\ge \limsup a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid x+\varepsilon<a_n\}$ πεπερ.

(3) $x\ge \liminf a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid a_n<x+\varepsilon\}$ άπειρο.

(4) $x\le \liminf a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid a_n<x-\varepsilon\}$ πεπερ.

(5) $x=\limsup a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid x-\varepsilon<a_n\}$ άπειρο και $\{n\in\mathbb{N} \mid x+\varepsilon<a_n\}$ πεπερ.

(6) $x=\liminf a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \{n\in\mathbb{N} \mid a_n<x+\varepsilon\}$ άπειρο και $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n<x-\varepsilon\}$ πεπερ.

Αποδ. Είναι αποτέλεσμα των προηγούμενων παρατηρήσεων.

Πρώτα βλέπουμε ότι:

$(1)+(2) \Rightarrow (5)$.

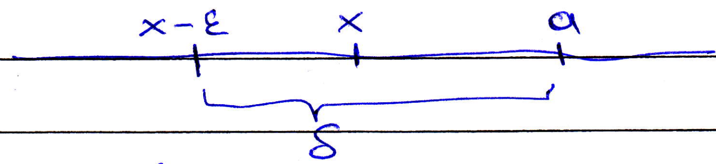
$(3)+(4) \Rightarrow (6)$.

Αντιστρέφοντας τις ανισότητες των (1), (2) παίρνουμε τις (3), (4) (θεωρούμε την $(-a_n)$).

Άρα αρκεί νδο ισχύουν (1) και (2). Έστω $a = \sup K \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, (a_{k_n}) : a_{k_n} \to a$.

$(1 \Rightarrow)$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$:



Θέτοντας $\delta := a-(x-\varepsilon) > 0$, έχουμε ότι $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$a_{k_n} \in (\underbrace{a-\delta}_{= x-\varepsilon}, a+\delta)\ \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow a_{k_n} > a-\delta = x-\varepsilon$ άπειρα.

$(2 \Rightarrow)$

Τα άπειρα $a_n > x+\varepsilon$ είναι μια υπακολουθία (a_{λ_n}).
φραγμένη, άρα $\exists\, (a_{\lambda_{\mu_n}})$ υπακολουθία της (a_{λ_n})

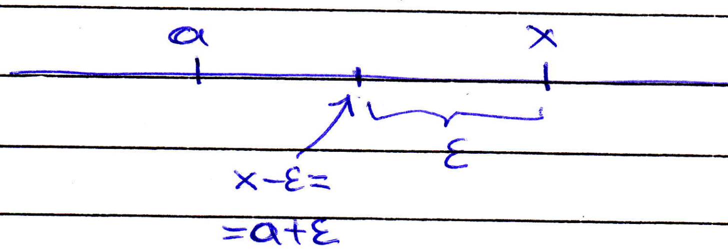
$$\mathbb{N} \xrightarrow{\mu} \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{N} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$$

με $a_{\lambda_{\mu_n}} \to \xi \geq x+\varepsilon > a = \sup K$, άτοπο.

(1 $\Leftarrow$)

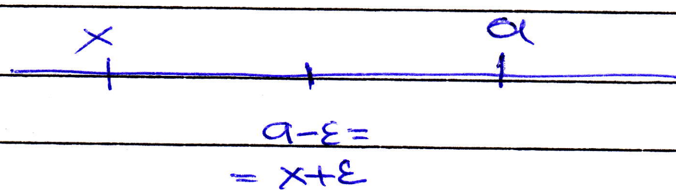
Με άτοπο: Έστω $x > a \Rightarrow \frac{x-a}{2} = \varepsilon > 0$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Υπόθ.} \Rightarrow x-\varepsilon < a_n : \text{ άπειρα} \\ a \geq a \underset{(2\Rightarrow)}{\Rightarrow} x-\varepsilon = a+\varepsilon < a_n : \text{ πεπερ.} \end{array}\right\} \text{ άτοπο.}$$



(2 $\Leftarrow$)

Με άτοπο: Έστω $x < a$, $\varepsilon := \frac{a-x}{2} > 0$.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Υπόθ} \Rightarrow x+\varepsilon < a_n : \text{ πεπερ.} \\ a \leq a \underset{(1\Rightarrow)}{\Rightarrow} a-\varepsilon = x+\varepsilon < a_n : \text{ άπειρα} \end{array}\right\} \text{ άτοπο.} \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡ. Έστω (a_n) φραγμ. Τότε:

(a_n) συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n$.

Απόδ. $(\Rightarrow)$ $a_n \to a \Rightarrow$ κάθε $a_{k_n} \to a \Rightarrow K = \{a\}$

$\Rightarrow \limsup a_n = \sup K = a = \inf K = \liminf a_n$.

$(\Leftarrow)$. Από το προηγ. Θεώρ., για $x = a$, $\forall \varepsilon > 0$:

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a + \varepsilon/2 < a_n\}$ και $B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < a - \varepsilon/2\}$ πεπερ. $\Rightarrow$

$\exists\, n_0 = \max A \cup B \in \mathbb{N}$ και $\forall\, n > n_0$: $a_n \notin A \cup B$,

άρα $a_n \in [a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2] \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. $\blacksquare$

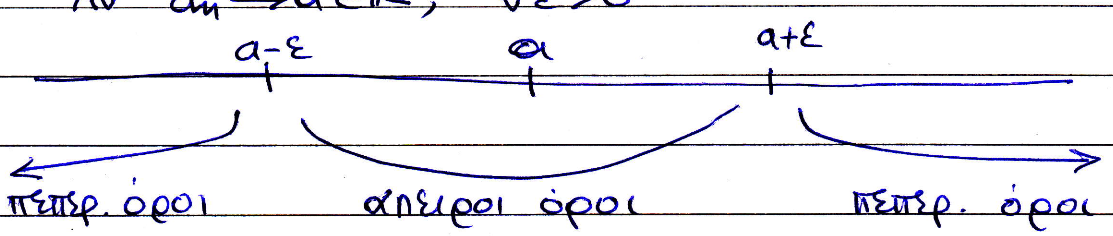
Παρατήρηση / Επέκταση του Ορισμού

(a_n) όχι άνω φραγμ. $\Rightarrow \exists\, a_{k_n} \to +\infty$.
Θέτουμε $\limsup a_n = +\infty$.

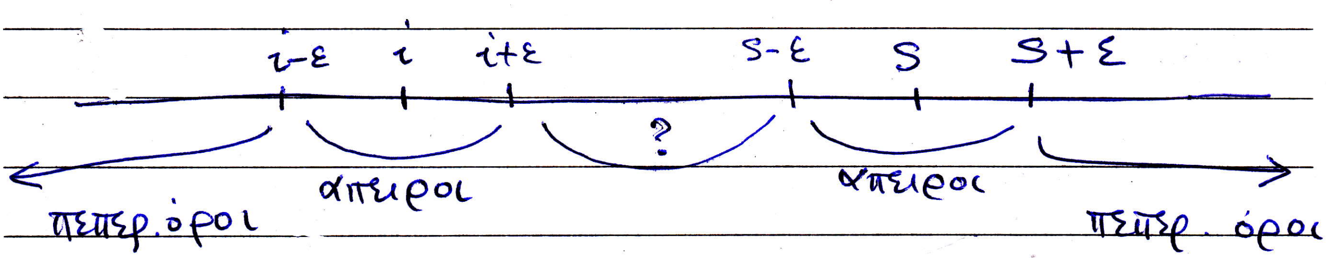
(a_n) όχι κάτω φραγμ. $\Rightarrow \exists\, a_{k_n} \to -\infty$
Θέτουμε $\liminf a_n = -\infty$.

Συνοψίζουμε: Για (a_n) φραγμένη:

Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$



Αν $i = \liminf a_n < s = \limsup a_n$, $\forall \varepsilon > 0$



άπειροι.