Άσκ. 19

Έστω $(a_n), (\beta_n)$ φραγμένες. ΝΔο
$$\liminf a_n + \liminf \beta_n \leq \liminf (a_n+\beta_n) \leq$$
$$\leq \limsup (a_n+\beta_n) \leq \limsup a_n + \limsup \beta_n .$$

Απόδ. Δείχνουμε την πρώτη: Έστω $(a_{k_n}+\beta_{k_n})$ υπακολουθία της $(a_n+\beta_n)$ με
$$a_{k_n}+\beta_{k_n} \longrightarrow \liminf (a_n+\beta_n).$$

(a_{k_n}) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, a_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow x \in K_a \Rightarrow x \geq \liminf a_n$.

Θεωρώ την υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}}+\beta_{k_{\lambda_n}})$ της $(a_{k_n}+\beta_{k_n})$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{k_{\lambda_n}}+\beta_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow \liminf (a_n+\beta_n) \\ a_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_{k_{\lambda_n}} \longrightarrow \underbrace{\liminf(a_n+\beta_n)-x}_{\in K_\beta}$$

$$\Rightarrow \liminf \beta_n \leq \liminf (a_n+\beta_n) - x$$
$$\underline{\liminf a_n \leq x \qquad\qquad\qquad}$$
$$\liminf a_n + \liminf \beta_n \leq \liminf (a_n+\beta_n).$$

Παρατηρούμε ότι η 2η ανισότητα είναι προφανής και η 3η αποδεικνύεται ανάλογα με την 1η.

Άσκ.

$a_n \to a \in \mathbb{R}$, (β_n) φραγμένη $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} \liminf (a_n+\beta_n) = a + \liminf \beta_n . \\ \limsup (a_n+\beta_n) = a + \limsup \beta_n . \end{cases}$$

Απόδ.

$$a+\liminf\beta_n = \liminf a_n + \liminf \beta_n \leq \text{(προηγ. Ασκ.)}$$
$$\leq \liminf(a_n+\beta_n).$$

$$a+\liminf\beta_n = a+\liminf((a_n+\beta_n)-a_n) \geq$$
$$\geq a+\liminf(a_n+\beta_n)+\liminf(-a_n)$$
$$= a+\liminf(a_n+\beta_n)-a$$
$$= \liminf(a_n+\beta_n).$$

Ασκ 23. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ δεν είναι Cauchy. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

Απόδ. Έστω ότι είναι Cauchy, και $\varepsilon = 1/4 > 0$. Τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$:
$\forall m > n \geq n_0 : |a_m - a_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m} < 1/4.$

Έστω $n \geq n_0$ και $m = 2n$. Τότε:

$$\frac{1}{2} \leq |a_{2n}-a_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} < 1/4, \quad \text{άτοπο.}$$

Αφού (a_n) όχι Cauchy, δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
Προφανώς $(a_n)\uparrow$, άρα όχι άνω φραγμένη $\Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \to +\infty$.