Άσκ. 24

Έστω $0<\mu<1$ και ακολουθία (a_n):

$$|a_{n+1}-a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}| \quad \forall n \geq 2.$$

Νδο η (a_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Απόδ.

Έστω $a=a_1$, $b=a_2$. Τότε:

$|a_3-a_2| \leq \mu |a_2-a_1| = \mu |b-a|$.

$|a_4-a_3| \leq \mu |a_3-a_2| \leq \mu^2 |b-a|$

$|a_5-a_4| \leq \mu |a_4-a_3| \leq \mu^3 |b-a|$

$\vdots$

$|a_{n+1}-a_n| \leq \mu |a_n-a_{n-1}| \leq \mu^{n-1} |b-a|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $m>n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$|a_m-a_n| \leq |a_m-a_{m-1}| + |a_{m-1}-a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1}-a_n| \leq$$

$$\leq (\mu^{m-2}+\mu^{m-3}+\cdots+\mu^{n-1})|b-a|$$

$$= \mu^{n-1}\cdot(\mu^{m-n-1}+\mu^{m-n-2}+\cdots+1)|b-a|$$

$$= \mu^{n-1}\cdot\frac{1-\mu^{m-n}}{1-\mu}\cdot|b-a| \leq$$

$$\leq \mu^{n-1}\cdot\frac{1}{1-\mu}\cdot|b-a| \to 0. \quad \circledast$$

Έστω $\varepsilon>0$. Από $\circledast$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$

$$\mu^{n-1}\cdot\frac{|b-a|}{1-\mu} < \varepsilon,$$

οπότε $\forall\, m>n\geq n_0$:

$$|a_m-a_n| \leq \mu^{n-1}\frac{|b-a|}{1-\mu} < \varepsilon$$ και (a_n) Cauchy.

Ασκ. 25

Θέτουμε $a_1 = a$, $a_2 = b \in \mathbb{R}$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.
Νδο (a_n) Cauchy.

Αποδ. Παρατηρούμε ότι

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - \frac{2a_n}{2} \right| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{2} \right| = \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|.$$

Άρα ισχύουν οι υποθ. της Ασκ. 24 για $\mu = 1/2$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Μπορείτε να βρείτε το όριο της (a_n);