ΟΜΑΔΑ Α

Θ1: (β_n): $\liminf \beta_n = -5$, $\limsup \beta_n = 10$.
Συγκλίνει η $\gamma_n = \dfrac{b_n}{1+\ln n}$;

Θ2: $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$
όρια υπακολουθιών και limsup, liminf.

Θ3: $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων
$\lim(b_n - a_n) = 0$. $\forall n\in\mathbb{N}$: $x_n \in [a_n, b_n]$. Νδο (x_n) βασική.

Θ4: (a_n): $a_{2n}\to a$, $a_{2n-1}\to\beta$, $a_{n+1}-a_n \to 0$. $\Rightarrow$
$a=\beta$ και $a_n \to a$.

(γ_n): $\gamma_n \to 0$. Νδο $\exists\ (\gamma_{k_n})$: $n^2\gamma_{k_n}\to 0$.

Θ5: Αληθές ή ψευδές;
- (b_n) βασική $\Rightarrow$ $(|b_n|)$ βασική.
- (γ_n) βασική $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0$: $|\gamma_n - \gamma_{n_0}| < \varepsilon$.

ΟΜΑΔΑ Α

Θ1 (β_n) φραγμένη:

<u>1ος τρόπος:</u>

$\liminf \beta_n = -5 \Rightarrow \exists$ πεπερ. πλήθος $\beta_n < -5-1=-6$.

$m := \min\{-5, \beta_n : \beta_n < -6\}$.

$\limsup \beta_n = 10 \Rightarrow \exists$ πεπερ. πλήθος $\beta_n > 10+1=11$

$M := \max\{10, \beta_n : \beta_n > 11\}$.

Τότε $m \le \beta_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>2ος τρόπος:</u>

Αν (β_n) όχι άνω φραγμ. $\Rightarrow \exists\ \beta_{k_n} \to +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup \beta_n = +\infty \neq 10$, άτοπο.

Αν (β_n) όχι κάτω φραγμ. $\Rightarrow \exists\ \beta_{\lambda_n} \to -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \cancel{\sup} \inf \beta_n = -\infty \neq -5$, άτοπο.

Άρα (β_n) φραγμένη.

Επομένως: $\gamma_n = \beta_n \cdot \dfrac{1}{1+\ln n}$ = μηδενική × φραγμ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_n \to 0$.

1. SOS! $\liminf \beta_n = -5$ και $\limsup \beta_n = 10 \not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow -5 \le \beta_n \le 10$.

2. SOS! $\limsup \gamma_n \neq \limsup \beta_n \cdot \limsup \dfrac{1}{1+\ln n}$.

$\liminf \gamma_n \neq \liminf \beta_n \cdot \liminf \dfrac{1}{1+\ln n}$.

$\boxed{\Theta 2}$ ∃ λυμένη.

$\boxed{\Theta 3}$ $([a_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ κιβωτισμένα διαστήματα με
$\lim \beta_n - a_n = 0 \Rightarrow \exists! \xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ και

$a_n \to \xi,\ \beta_n \to \xi.$

Άρα: $x_n \in [a_n, b_n] \Rightarrow \underset{\downarrow \atop \xi}{a_n} \le x_n \le \underset{\downarrow \atop \xi}{\beta_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to \xi.$

Αφού (x_n) συγκλίνουσα σε $\xi \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_n)$ βασική.

$\boxed{\Theta 4}$ (α) Έστω $\gamma_n = a_{n+1} - a_n \to 0.$
Θεωρώ την υπακολουθία άρτιων δεικτών:
$\gamma_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \to \beta - a = 0 \Rightarrow a = \beta.$

Άρα $a_{2n} \to a,\ a_{2n-1} \to a \overset{\circledast}{\Rightarrow} a_n \to a.$

$\circledast$ όπως σε γνωστή άσκηση.

(β) $\gamma_n \to 0. \Rightarrow$
Για $\varepsilon = 1 = 1/1^3$ $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}: |\gamma_{k_1}| < 1/1^3$ (και $|\gamma_n| < 1,\ \forall n \ge k_1$).
Για $\varepsilon = 1/2^3$ $\exists\, k_2 > k_1: |\gamma_{k_2}| < 1/2^3$ ($|\gamma_n| < 1/2^3\ \forall n \ge n_0(1/2^3)$)
⋮
Για $\varepsilon = 1/m^3$ $\underbrace{\exists\, k_m > k_{m-1}}_{\Downarrow}: \underbrace{|\gamma_{k_m}| < 1/m^3}_{\Downarrow}$ ($|\gamma_n| < 1/2^3\ \forall n \ge n_0(1/m^3)$).

(γ_{k_m}) υπακολ. $\quad m^3 \gamma_{k_m} \to 0.$

$\boxed{\Theta 5}$.

(i) <u>Α΄ λύση</u>

$-\ (\beta_n)$ βασική $\Rightarrow \exists\, \beta \in \mathbb{R}: \ \beta_n \to \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\beta_n| \to |\beta| \Rightarrow (|\beta_n|)$ βασική.

<u>Β΄ λύση</u>

(β_n) βασική $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, m, n \geq n_0: \ |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, m, n \geq n_0:$

$$||\beta_n| - |\beta_m|| \leq |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon$$

$\Rightarrow (|\beta_n|)$ βασική.

(ii) (γ_n) βασική $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0$ και $m = n_0$:

$$|\gamma_n - \gamma_{n_0}| < \varepsilon.$$

Αντίστροφα: $\forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n, m \geq n_0$:

$|\gamma_n - \gamma_{n_0}| < \varepsilon/2$ και $|\gamma_m - \gamma_{n_0}| < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\gamma_n - \gamma_m| \leq |\gamma_n - \gamma_{n_0}| + |\gamma_{n_0} - \gamma_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ΟΜΑΔΑ Β

Θ1: (a_n): $a_{3n} \to 5$, $a_{3n+1} \to 6$, $a_{3n+2} \to 7$. Τότε:
$a_{k_n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \ell = 5, 6$ ή 7.
Βρείτε limsup, liminf. Είναι η (a_n) φραγμένη?

Θ2: (a_n) φραγμένη. $\beta_n = a_n + \frac{1}{n}$. ΝΔΟ
x σ.συσ (ορ. σημ.) της $(a_n) \Rightarrow x$ σ.σ. της (β_n).

Θ3: (a_n): $|a_{n+1} - a_n| < 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα.

Θ4: οριακά σημεία των (a_n), (b_n):

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right) + \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & n \text{ άρτιος} \\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} & n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Θ5: (a_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Μπορεί $|a_n| \to a \in [0, +\infty)$;;

ΟΜΑΔΑ Β

Θ1. $a_{3n} \to 5$, $a_{3n+1} \to 6$, $a_{3n+2} \to 7$.

Έστω $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$.
Η (a_{k_n}) έχει άπειρους όρους κοινούς με μία από τις (a_{3n}), (a_{3n+1}) και (a_{3n+2}), έστω με την (a_{3n+1}). Οι κοινοί όροι αποτελούν υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ της (a_{k_n}) αλλά και της (a_{3n+1}).
Σαν τέτοια: $a_{k_{\lambda_n}} \to a$ και $a_{k_{\lambda_n}} \to 6 \Rightarrow a = 6$.

Άρα $K = \{5, 6, 7\}$ και $\liminf a_n = 5$, $\limsup a_n = 7$.

Η (a_n) είναι φραγμένη: Με άτοπο:
Αν δεν είναι άνω φρ. $\Rightarrow \limsup a_n = +\infty \neq 7$, άτοπο.
Αν δεν είναι κάτω φρ $\Rightarrow \liminf a_n = -\infty \neq -5$, άτοπο.

Θ2 $x =$ ορ. σημ. της $(a_n) \Rightarrow \exists\, a_{k_n} \to x$.
Θεωρώ την αντίστοιχη υπακολουθία $\left(\beta_{k_n} = a_{k_n} + \frac{1}{k_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
Τότε
$\beta_{k_n} = a_{k_n} + \frac{1}{k_n} \to x + 0 = x \Rightarrow x$ ο.σ. της (β_n).

$\boxed{\Theta 3}$

Έστω $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \dots + a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

<u>1ος τρόπος:</u>

$$(*) \leq \frac{1}{(m-1)(m-2)} + \frac{1}{(m-2)(m-3)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= -\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-2} + \frac{1}{m-3} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1} < \frac{1}{n-1}$$

Οπότε: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n-1} < \varepsilon$ και

$$\forall m \geq n \geq n_0 : |a_m - a_n| \leq \frac{1}{n-1} < \varepsilon.$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$(*) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το κρ. Cauchy για την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$

ή

$(*) = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} = S_{m-1} - S_n$ όπου (S_m) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ που γνωρίζουμε ότι συγκλίνει $\Rightarrow (S_m)$ Cauchy.

$\boxed{\Theta 4}$

$a_{2n} = (1+3/n) + 1/n^2 \to 1$

$a_{2n-1} = -(1+3/n) + 1/n \to -1.$

Επειδή οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) περιέχουν όλους τους όρους της (a_n) κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της (a_n) συγκλίνει ή στο 1 ή στο -1 (απόδ. όπως προηγ.).

$\beta_{2n} = \sqrt[2n]{2n} \to 1$ σαν υπακ. του $\sqrt[n]{n} \to 1.$

και

$\beta_{2n-1} = 1/\sqrt[2n-1]{2n-1} \to \frac{1}{1} = 1.$

Άρα $\beta_n \to 1$ (γνωστή άσκηση).

$\boxed{\Theta 5}$

$|a_n| \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a_n|$ φραγμ. $\Rightarrow \exists M>0 : |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow -M \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)$ φραγμ. $\xRightarrow{BW}$ $\exists$ συγκλ. υπακ., άτοπο.