ΣΕΙΡΕΣ: ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 16.

Υπολογίστε τα αθροίσματα.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Παρατηρούμε ότι

$$a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

δηλ. η δοθείσα σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1}$.

Οπότε $b_1 = \frac{1}{2}$ και $b_n \to 0$, άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = b_1 - \lim b_n = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{6}\right)^k + \left(\frac{3}{6}\right)^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty}(1/3)^k + \sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(1/3)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k - 2 =$$

$$= \frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{1-1/2} - 2 = 3/2.$$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = a_k,$$

άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$,

οπότε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = b_1 - \lim b_n = 1-0=1.$$

Ασκ 17

Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Παρατηρούμε ότι
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)},$$

οπότε, η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_k = \frac{1}{2k(k+1)}$, άρα
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = b_1 - \lim b_k = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Ασκ 18

Εξετάστε για ποιές τιμές του x συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

Απαντ.

Για $|x|<1$, $a_n = \frac{1}{1+x^n} \to 1 \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ δεν συγκλίνει.

Για $x=1$, $a_n = \frac{1}{2} \to 1/2 \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ δεν συγκλίνει

Για $x=-1$, οι περιττοί όροι της (a_n) δεν ορίζονται.

Για $|x|>1$ εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $b_k = \frac{1}{|x|^k}$, που είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{|x|} < 1$:

$$\frac{|a_k|}{|b_k|}=\frac{|x|^k}{|1+x^k|}=\left|\frac{1}{(1/x)^k+1}\right|\to\frac{1}{1+0}=1,$$

άρα η Σa_k συγκλίνει απολύτως.

$\boxed{\text{Ασκ 20}}$

Εξετάστε την σύγκλιση των σειρών:

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$

Παρατηρώ ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, όπου $\forall k\in\mathbb{N}: a_{2k-1}=\frac{1}{2^k}$ και $a_{2k}=\frac{1}{3^k}$. Τότε, αν (S_n) είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς, για την υπακολουθία των άρτιων όρων έχουμε:

$$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}=2+\frac{3}{2}=M.$$

Άρα $(S_{2n})\uparrow$ και άνω φραγμ. $\Rightarrow S_{2n}\to S\in\mathbb{R}$.

Επίσης, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$S_{2n-1}=S_{2n-2}+\frac{1}{3^n}\to S+0=S.$$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S\in\mathbb{R}$.

(ii) $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\cdots$

Αν (t_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων έχουμε

$$t_{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{2^k}\to\frac{1}{1-1/2}=2.$$

Παρατηρούμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\underset{\substack{\downarrow\\2}}{t_{2n}}\leq t_{2n+1}\leq\underset{\substack{\downarrow\\2}}{t_{2(n+1)}}\Rightarrow t_{2n+1}\to2 \quad\text{και}\quad t_n\to2.$$

Ασκ 24.

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές:

(γ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0<q<p)$.

Θεωρούμε την $b_k = \frac{1}{k^p} > 0$. Αφού $q<p \Rightarrow$

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^p - n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^{q-p}} = \frac{1}{1-0} = 1 > 0$

$(q-p<0)$.

Απο Θ5 (ισοδ. συμπ.) η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p-k^q}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow p>1$.

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

Θεωρούμε την $b_k = \frac{1}{k}$, βρίσκουμε

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^{1+1/k}} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k\cdot \sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$

και εφαρμόζουμε κριτ. ισοδ. συμπ (Θ5): αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ αποκλίνει.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!

Προσπαθώντας να εφαρμόσουμε στην (δ) το απλό κριτήριο σύγκρισης (Θ3) με την $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου πάλι $b_k = \frac{1}{k}$, βρίσκουμε

$$a_k = \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{k}} < \frac{1}{k} = b_k, \quad (*)$$

όπου $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$. Απο $(*)$ $\not\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

(ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-q^k}$ $(0<q<p)$.

Θεωρούμε την $b_k = \frac{1}{p^k} > 0$, και παίρνουμε
$\frac{a_k}{b_k} = \frac{p^k}{p^k-q^k} = \frac{1}{1-(q/p)^k} \longrightarrow \frac{1}{1-0} = 1 > 0.$

Απο οριακό κρ. σύγκρισης (Θ4), $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-q^k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow 0<\frac{1}{p}<1 \Leftrightarrow p>1$.

(στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

Α΄ Λύση: Παρατηρούμε ότι $1\leq 2+(-1)^k \leq 3$, άρα
$0 \leq a_k = \frac{2+(-1)^k}{2^k} \leq \frac{3}{2^k} = b_k$. Αφού η $\sum b_k = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$
συγκλίνει, από το κρ. σύγκρισης (Θ3), συγκλίνει και
η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Β΄ Λύση: Παρατηρώ ότι $\frac{2+(-1)^k}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{(-1)^k}{2^k}$.
Θέτουμε $a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$, $k\geq 1$, και $b_k = \frac{(-1)^k}{2^k}$. Τότε
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ και

$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, δηλ. η $\sum b_k$ συγκλίνει απολύτως,

άρα συγκλίνει σε $s\in\mathbb{R}$. Οπότε
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει από

Μάθημα 05, Πρόταση 1.

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Παρατηρούμε ότι $a_k = k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

Θέτουμε $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$, και βρίσκουμε

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \cdot \frac{k^{3/2}}{k^p} = \frac{1}{2} > 0.$$

Από το κριτ. ισοδύναμης συμπ., η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2-p}}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $3/2 - p > 1 \Leftrightarrow 1/2 > p$.

Ασκ. 25

Εστω $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Νδο η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

Αποδ

Παρατηρούμε ότι:

→ για $a_k = 0 \Rightarrow 0 = \frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{1}{k^2}$

→ για $a_k > 0 \Rightarrow 0 < \frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}$.

Επειδή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, από το κρ. σύγκρισης.