Ασκ.

Εστω $(a_n)\downarrow$ με $a_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισοδυναμία

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει} \overset{\circledast}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k a_{3^k} \text{ συγκλίνει}$$

Απαντ.

Συμβολίζουμε με (s_n) και (t_n) τις ακολουθίες μερικών αθροισμάτων των σειρών $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k a_{3^k}$, αντίστοιχα.

Δηλ:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$t_n = a_1 + 3a_3 + 9a_9 + 27a_{27} + \dots + 3^n a_{3^n}.$$

Παρατηρούμε ότι $(s_n)\uparrow$ και $(t_n)\uparrow$. Για να την $\circledast$ αρκεί νδο (s_n) άνω φραγμ. $\Leftrightarrow$ (t_n) άνω φραγμ.

Εστω (s_n) άνω φραγμ. από $M>0 \Rightarrow$

$$t_n = a_1 + 3a_3 + 9a_9 + 27a_{27} + \dots + 3^n a_{3^n} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}t_n = \frac{2}{3}a_1 + 2a_3 + 6a_9 + 18a_{27} + \dots + 2\cdot 3^{n-1} a_{3^n} \leq$$

2 όροι   6 όροι

$$\leq a_1 + (a_2+a_3) + \underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)}_{} + \dots$$

$$\dots + (a_{3^{n-1}+1} + \dots + a_{3^n}) = s_{3^n} \leq M \Rightarrow$$

(t_n) είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3M}{2}$.

Έστω τώρα ότι η (t_n) είναι άνω φραγμ. από $N>0$.

Έστω και $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists!\, n \in \mathbb{N}: 3^n \leq m < 3^{n+1}$. Τότε:

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m \leq$$

$$\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{3^n} + \cdots + a_m + \cdots + a_{3^{n+1}}$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{26}) + \cdots + (a_{3^n} + \cdots + a_{3^{n+1}}) \leq$$

$$\leq 2a_1 + 6a_3 + 18a_9 + \cdots + 2 \cdot 3^n a_{3^n} =$$

$$= 2t_n \leq 2N.$$