ΜΑΘΗΜΑ 7

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΛΟΓΟΥ - ΡΙΖΑΣ - DIRICHLET

ΘΕΩΡ. 1 (Κριτήριο λόγου - D' Alembert)

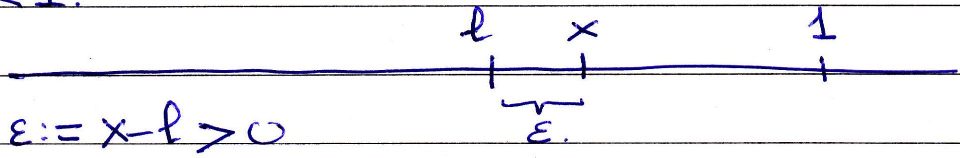
Εστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ με $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε:

(α) Αν $\exists \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως

(β) Αν $\exists \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Αποδ.

(α) Εστω ότι $\exists \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$, και έστω $\ell < x < 1$.



θέτω $\varepsilon := x - \ell > 0$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \ell \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in (\ell-\varepsilon, \underbrace{\ell+\varepsilon}_{=x})$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < x$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : |a_{k+1}| < x|a_k|.$$

Άρα: $|a_{N+1}| < x|a_N|$

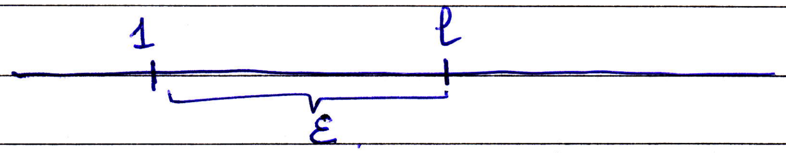
$|a_{N+2}| < x|a_{N+1}| < x^2|a_N|$

$\vdots$

$|a_{N+k}| < \dots < x^k|a_N|$

Άρα ισχύει το κριτήριο σύγκρισης για τις $(a_{N+k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $b_k = x^k$, με $M = |a_N|$. Επειδή η $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$, δηλ η σειρά $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$. Από την Πρόταση 2(α) του Μαθήματος 5, η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Έστω $\ell = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$



Παίρνοντας $\varepsilon := \ell - 1 > 0$, βρίσκουμε ότι $\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N :$
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 = \ell - \varepsilon \Rightarrow$

$\forall k \geq N : |a_{k+1}| > |a_k| > |a_{k-1}| > \dots > |a_N| > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. ∎

__Παρατήρηση.__ Αν $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, και $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$
$\Rightarrow$ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μπορεί να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει.

Πχ: για $a_k = \dfrac{1}{k} \Rightarrow \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{k}{k+1} \to 1$ με την

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ να αποκλίνει.

για $a_k = \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{k^2}{k^2+1} \to 1$ με την

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ να συγκλίνει.

__ΕΡΩΤΗΣΗ.__ Τι συμβαίνει αν $\nexists \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$;

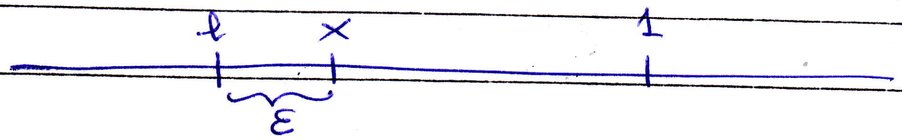
__ΘΕΩΡ. 2 (Κριτήριο ρίζας – Cauchy).__
Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Τότε:

(α) Αν $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Αποδ.

(α) Αν $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell < 1 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : \ \ell < x < 1.$

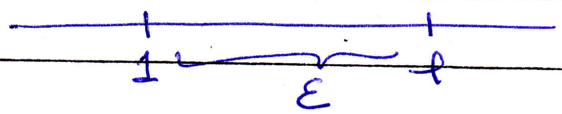


Για $\varepsilon = x - \ell > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq N :$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon = x) \Rightarrow$$
$$\sqrt[k]{|a_k|} < x \Rightarrow$$
$$|a_k| < x^k.$$

Από το κρ. σύγκρισης της $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ και της $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$ (με $|x|<1$) έχουμε ότι $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell > 1 \Rightarrow$



$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : \ \sqrt[k]{|a_k|} > \ell - \varepsilon = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq N : \ |a_k| > 1 \Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. ■

Παρατήρηση. Αν $\exists \lim \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow$ δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

π.χ: οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

Τί συμβαίνει αν $\nexists \lim \sqrt[k]{|a_k|}$;

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $x \in \mathbb{R}$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;

Εφαρμόζουμε κρ. ρίζας:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \longrightarrow |x|.$

Άρα:

αν $|x|<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ συγκλίνει απολύτως.

αν $|x|>1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ αποκλίνει

αν $|x|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1/k \text{ αποκλίνει} \\ x=-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ συγκλίνει.} \end{cases}$

Δηλ. η σειρά συγκλίνει για $-1 \leq x < 1$.

(β) Θεωρούμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;

Με κρ. ρίζας:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{x^2}{(\sqrt[k]{k})^2} \longrightarrow x^2.$

Άρα:

αν $|x|<1 \Leftrightarrow |x^2|<1 \Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ συγκλίνει.

αν $|x|>1 \Leftrightarrow x^2>1 \Rightarrow$ η σειρά αποκλίνει.

αν $|x|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ συγκλίνει} \\ x=-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ συγκλίνει.} \end{cases}$

Δηλ. η σειρά συγκλίνει για $-1 \leq x \leq 1$.

(γ). Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;

Για $x=0$, η σειρά συγκλίνει.

Για $x \neq 0$, με κρ. λόγου: $\left|\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \dfrac{k!}{x^k}\right| = \dfrac{|x|}{k+1} \longrightarrow 0$

και η σειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΛΗΜΜΑ (άθροιση κατά μέρη - Abel).

Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $s_0 = 0$.

Τότε: $\forall\ n > m \geq 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.$$

Αποδ. Έχουμε:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} (s_k b_k - s_{k-1} b_k) =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - (s_{m-1} b_m + s_m b_{m+1} + \dots + s_{n-1} b_n) =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} (s_k b_k - s_k b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡ 3 (Κριτήριο Dirichlet)

Έστω οι (a_k), (b_k), όπου: $b_k \geq 0$, $(b_k) \downarrow$, $b_k \to 0$ και $\left(s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ φραγμένη $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \text{ συγκλίνει.}$$

Απόδ.

Θδο ισχύει το κρ. Cauchy για την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

(s_n) φραγμ. $\Rightarrow \exists M > 0 : |s_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$b_n \to 0 \Rightarrow$ για το $\frac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$$0 \leq b_n < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \dots \leq b_{N+3} \leq b_{N+2} \leq b_{N+1} \leq b_N < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Επομένως, για $n > m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |s_n| \cdot |b_n| + |s_{m-1}| \cdot |b_m| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + M \cdot b_n + M \cdot b_m =$$

$$= M(b_m - b_n) + M \cdot b_n + M \cdot b_m = 2M b_m <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα (Κριτήριο Leibniz)

$(b_k) \downarrow$ και $b_k \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ συγκλίνει.

Απόδ. Η $a_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, έχει (s_n) φραγμένη, άρα εφαρμόζεται το κριτήριο Dirichlet. $\blacksquare$