(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Παρατηρούμε ότι $a_k = k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

Θέτουμε $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$, και βρίσκουμε

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\cdot\frac{k^{3/2}}{k^p} = \frac{1}{2} > 0.$$

Από το κριτ. ισοδύναμης συμπ., η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2-p}}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow 3/2 - p > 1 \Leftrightarrow 1/2 > p$.

Ασκ. 25

Εστω $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Νδο η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+k^2a_k}$ συγκλίνει.

Αποδ

Παρατηρούμε ότι:

→ για $a_k = 0 \Rightarrow 0 = \frac{a_k}{1+k^2a_k} < \frac{1}{k^2}$

→ για $a_k > 0 \Rightarrow 0 < \frac{a_k}{1+k^2a_k} < \frac{a_k}{k^2a_k} = \frac{1}{k^2}$.

Επειδή $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κρ. σύγκρισης.

Ασκ 19

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$

Κριτήριο ρίζας:

$\sqrt[k]{|k^k x^k|} = k|x| \longrightarrow +\infty \Rightarrow$ η σειρά αποκλίνει.

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

Κριτήριο ρίζας:

$\sqrt[k]{|x^k/k^2|} = \frac{|x|}{(\sqrt[k]{k})^2} \longrightarrow \frac{|x|}{1^2} = |x|.$

Οπότε:

Για $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει

Για $|x|<1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως

Για $|x|=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

Κριτήριο ρίζας:

$\sqrt[k]{|k^3 x^k|} = (\sqrt[k]{k})^3 \cdot |x| \longrightarrow 1^3 \cdot |x| = |x|.$

Για $|x|<1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως

Για $|x|>1$ —"— αποκλίνει

Για $|x|=1$: $|a_k| = k^3 1^k = k^3 \longrightarrow +\infty \neq 0 \Rightarrow$ η σειρά αποκλίνει.

(ε) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

Κριτήριο λόγου (για $x \neq 0$):

$\left| \frac{2^{k+1} x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k \cdot x^k} \right| = \frac{2|x|}{k+1} \longrightarrow 0 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει απολύτως.

(ζ) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$

Κριτήριο λόγου (για $x \neq 0$):

$$\left|\frac{(k+1)^3 x^{k+1}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^3 x^k}\right| = \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{|x|}{3} \to \frac{|x|}{3}.$$

Για $|x|<3$ η σειρά συγκλίνει απολύτως

Για $|x|>3$ η σειρά αποκλίνει.

Για $|x|=3$: $|a_k| = k^3 \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^3/3^k\right) \cdot x^k$ αποκλίνει.

Ασκ 21.

Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την (a_n) ώστε να συγκλίνει η σειρά

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$$

Απάντ. $S_{2n} = 0 \to 0$.

Αν $S_n \to x \Rightarrow x = 0$. Άρα $S_n \to 0 \Leftrightarrow$ $S_{2n-1} \to 0$. Όμως $S_{2n-1} = a_n$. Επομένως

$S_n \to 0 \Leftrightarrow a_n \to 0$.