ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k k!}{k^k}$$

Λύση

Δοκιμάζουμε κριτήριο λόγου: για $a_k = \frac{e^k k!}{k^k}$ έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{k+1}\cdot(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{e^k \cdot k!} = e\cdot(k+1)\cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} =$$

$$= e\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \quad \circledast$$

Παίρνοντας όριο βρίσκουμε $\frac{a_{k+1}}{a_k} \longrightarrow \frac{e}{e} = 1$, άρα το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα, ΟΜΩΣ:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)\uparrow \text{ με } \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e \Rightarrow e > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\overset{\circledast}{\Rightarrow} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1 \quad \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_k)\uparrow \text{ και } a_k > 0 \quad \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ αποκλίνει}$$