# ΜΑΘΗΜΑ 23
## ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

Ας ξεκινήσουμε με μια παρατήρηση:

Έστω $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ πολυώνυμο.
Υπολογίζουμε στο 0 τις τιμές του p και των παραγώγων του:

$p(0) = a_0$
$p'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \Rightarrow p'(0) = a_1$
$p''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 \Rightarrow p''(0) = 2a_2$
$p'''(x) = 24a_4x + 6a_3 \Rightarrow p'''(x) = 6a_3$
$p^{(4)}(x) = 24a_4 \Rightarrow p^{(4)}(x) = 24a_4$

Επαγωγικά, για πολυώνυμο n-βαθμού, βρίσκουμε $p^{(n)}(0) = n!\,a_n$.

Άρα, γνωρίζοντας τις τιμές $p^{(k)}(0)$ μπορούμε να βρούμε το πολυώνυμο, υπολογίζοντας τους συντελεστές:

$$a_k = p^{(k)}(0)/k!\ ,\quad k = 0, 1, \dots, n$$

οπότε:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Τί συμβαίνει αν, αντί των $p^{(k)}(0)$, γνωρίζουμε τις τιμές $p^{(k)}(x_0)$, $k = 0, \dots, n$, για κάποιο $x_0 \neq 0$;

Θεωρούμε την μεταφορά $\mu_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: h \mapsto \mu_{x_0}(h) := x_0 + h$
και το πολυώνυμο

$$q(h) = p \circ \mu_{x_0}(h) = p(x_0 + h).$$

Τότε:

$$q' = (p \circ \mu_{x_0})' = (p' \circ \mu_{x_0}) \cdot \underbrace{\mu'_{x_0}}_{=1} = p' \circ \mu_{x_0}$$

$$q'' = (p' \circ \mu_{x_0})' = (p'' \circ \mu_{x_0}) \cdot \mu'_{x_0} = p'' \circ \mu_{x_0}$$

και επαγωγικά:

$$q^{(k)} = p^{(k)} \circ \mu_{x_0}, \quad \ldots$$

άρα

$$q^{(k)}(0) = p^{(k)} \circ \mu_{x_0}(0) = p^{(k)}(x_0) \quad \forall\, k = 0, \ldots, n.$$

και $\forall\, x = x_0 + h \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = p(x_0 + h) = p \circ \mu_{x_0}(h) = q(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^{(k)}(0)}{k!} h^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}$$

Αν μια (πολλές φορές) παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ δεν είναι πολυώνυμο, πόσο μοιάζει με μια παράσταση της ανωτέρω μορφής;

ΟΡΣ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $n$-φορές παραγωγίσιμη στο $x_0\in[a,b]$.
Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n$ της $f$ στο $x_0$ είναι το
πολυώνυμο

$$T_{n,f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Το υπόλοιπο Taylor τάξης $n$ της $f$ στο $x_0$ είναι η διαφορά

$$R_{n,f,x_0} := f(x) - T_{n,f,x_0}(x).$$

Όταν $x_0=0$ Taylor ⇝ MacLaurin. | πολ/μο υπόλοιπο.

Παρατήρηση: Παραγωγίζοντας το $T_{n,f,x_0}(x)$ έχουμε:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow T(x_0) = f(x_0).$$

$$T'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \Rightarrow T'(x_0) = f'(x_0)$$

$$T''(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2} \Rightarrow T''(x_0) = f''(x_0).$$

$$\vdots$$

$$T^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!}(x-x_0)^{k-n} \Rightarrow T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Δηλ. το πολ. Taylor βαθμού $n$ είναι ένα (το μοναδικό!) πολυώνυμο $n$-οστού βαθμού, που στο $x_0$ έχει ίδια τιμή και ίδιες παραγώγους με την συνάρτηση $f$.

Παρατήρηση

f n-1 φορές παραγ/μη στο $[a,b]$ και

n — " — $x_0 \in [a,b]$. Τότε.

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k \cdot (x-x_0)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} =$$

$$= T_{n-1,f',x_0}(x),$$

και

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x) \Rightarrow$$

$$R'_{n,f,x_0}(x) = f'(x) - T'_{n,f,x_0}(x) =$$

$$= f'(x) - T_{n-1,f',x_0}(x) = R_{n-1,f',x_0}(x).$$

Οι ανωτέρω ιδιότητες ισχύουν $\forall\, m \leq n$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x) =$$

$$= \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\downarrow 0} - \frac{f'(x_0)}{1!}\underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow 0} - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\underbrace{(x-x_0)^n}_{\downarrow 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} R_{n,f,x_0}(x) = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$ :
$f$ $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $n$ φορές παραγωγίσιμη στο $x_0$. Τότε:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Απόδ. Με επαγωγή στο $n$: Για $n=1$

$$R_{1,f,x_0}(x) = f(x)-f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0} = 0.$$

Έστω ότι ισχύει για $n=m$ (για κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις!). Θδο ισχύει για $n=m+1$.

Εστω λοιπόν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$:
$f$ $m$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $m+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $x_0$. Τότε η επαγωγική υπόθεση ισχύει για την $f'$, άρα

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{m+1,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{m+1}}\overset{dLH}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{R'_{m+1,f,x_0}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m}=0. \blacksquare$$

<u>ΛΗΜΜΑ</u> $p$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Τότε: $p\equiv 0$.

<u>Απόδ.</u> Με επαγωγή στο $n$: Για $n=1$, $p(x)=a_0+a_1x$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{x-x_0}=0\Rightarrow p(x_0)=0\Rightarrow x_0 \text{ ρίζα του } p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x)=c\cdot(x-x_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c(x-x_0)}{x-x_0}=c\equiv 0$$

$$\Rightarrow p\equiv 0$$

Εστω ότι το λήμμα ισχύει για κάθε πολ/μο βαθμού $\leq n$.
ΘΔο ισχύει και για κάθε πολ/μο βαθμού $\leq n+1$. Εστω $p(x)$ ένα τέτοιο, με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0\Rightarrow x_0 \text{ ρίζα του } p(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x)=(x-x_0)\cdot q(x),$$

όπου $q(x)$ πολ/μο βαθμού $\leq n$ και

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{q(x)(x-x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{q(x)}{(x-x_0)^{n}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q\equiv 0\Rightarrow p(x)=(x-x_0)q(x)\equiv 0. \blacksquare$$

ΘΕΩΡ. Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$: $f$ $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $n$ φορές παραγωγίσιμη στο $x_0$. Τότε το $T_{n,f,x_0}(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0 \quad (*)$$

Απόδ. Επειδή $f(x)-T_{n,f,x_0}(x)=R_{n,f,x_0}(x)$, η ισότητα $(*)$ είναι αποτέλεσμα της Πρότασης της σελ. 23.5.

Για την μοναδικότητα: Εστω ότι υπάρχει και ένα $T_1(x)$, πολυώνυμο βαθμού $\leq n$, με

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Τότε:

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_1(x)}{(x-x_0)^n}-\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_1(x)-f(x)+T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{T_{n,f,x_0}(x)-T_1(x)}{(x-x_0)^n}\Rightarrow$$

$\Rightarrow T_1(x)=T_{n,f,x_0}(x)$, από το προηγ. Λήμμα. $\blacksquare$

Η μοναδικότητα που δείχτηκε στο προηγ. Θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι κάποιο πολ/μο $p(x)$ είναι το $T_{n,f,x_0}(x)$.

Παραδ (1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$, είναι $C^\infty$.
Θέτουμε

$$p_n(x)=1+x+\dots+x^n \Rightarrow$$

$$f(x)-p_n(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+\dots+x^n)=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{1-x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-0)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0\Rightarrow$$

$$p_n(x)=T_{n,f,0}(x).$$

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, είναι $C^\infty$. Θέτουμε:

$$p_{2n}(x)=p_{2n+1}(x)=1-x^2+x^4-x^6\dots+(-1)^n x^{2n}=$$

$$=1+(-x^2)+(-x^2)^2+\dots+(-x^2)^n\Rightarrow$$

$$f(x)-p_{2n}(x)=\frac{1}{1+x^2}-[1-x^2+x^4-\dots+(-1)^n x^{2n}]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_{2n}(x)}{(x-0)^{2n}}=(-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x^2}=0$$

Ομοίως $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_{2n+1}(x)}{(x-0)^{2n+1}}=(-1)^{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0.$

Άρα:

$p_{2n}(x)=T_{2n,f,x_0}(x)$ και $p_{2n}(x)=p_{2n+1}(x)=T_{2n+1,f,x_0}(x).$