Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2022-23 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 1.

1. Να βρεθούν τα $\liminf$ και $\limsup$ της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

2. Έστω (a_n) μία ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η (a_n) συγκλίνει.

3. Έστω (a_n) μία ακολουθία και (x_k) ακολουθία της οποίας οι όροι είναι οριακά σημεία της (a_n). Δείξτε ότι αν $x_k \to x$, τότε και το x είναι οριακό σημείο της (a_n).

4. (α) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε σημείο του A είναι οριακό σημείο. (β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε πραγματικός αριθμός είναι οριακό σημείο.

5. Έστω (a_n) και (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n+b_n) \leq \\ \limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n\ .\end{aligned}$$

6. Έστω (a_n) μία ακολουθία και

$$b_n = \sup\{|a_{n+k}-a_n|\ : k \in \mathbf{N}\}.$$

   Να δειχθεί ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

7. Έστω (a_n) για την οποία υπάρχει $\mu \in (0,1)$ ώστε $|a_{n+2}-a_{n+1}| \leq \mu|a_{n+1}-a_n|$, για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι η (a_n) έιναι ακολουθία Cauchy.

8. Έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται από $a_1, a_2 > 0$ και την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1}-a_n}{3}\ ,\ \ n \in \mathbf{N}.$$

   Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.