Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2022-23 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 2.

1. Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία μίας ακολουθίας (a_n). Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, έπεται απαραίτητα ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει ; Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.
2. Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
3. Να βρεθεί για ποια $x \in \mathbf{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
4. Έστω $a_n > 0$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Ισχύει το αντίστροφο;
5. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k a^n}{n!}$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2} \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{\beta}{n}}}$$

$$\text{(v)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n-q^n} \quad (0<q<p) \qquad \text{(vi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q} \quad (0<q<p)$$

6. Έστω $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ συγκλίνει.
7. Να βρεθούν τα $\alpha \in \mathbf{R}$ για τα οποία συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$$

8. Έστω $a_n \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ συγκλίνει. Ισχύει το αντίστροφο;
9. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1) \ .$$

Υπόδειξη: για τη δεύτερη σειρά χρησιμοποιείστε κατάλληλα το ότι $(1+\frac{1}{n})^n \leq 3$.

10. Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Να δειχθεί ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ τότε $na_n \to 0$.
11. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνουσα σειρά μη-αρνητικών όρων. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} = 1 \ .$$