Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2022-23 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 3.

1. Να δειχθεί ότι η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

2. Να δειχθεί ότι το άθροισμα ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι δεν ισχύει (εν γένει) η αντίστοιχη ιδιότητα για το γινόμενο δύο συναρτήσεων, ισχύει όμως αν οι δύο συναρτήσεις υποτεθούν επιπλέον φραγμένες.

3. (α) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. Να δειχθεί ότι αν μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ επιδέχεται ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$, δηλαδή αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x - \beta) = 0$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

6. Έστω $f : [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο $[0, +\infty)$.

7. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς / Lipschitz συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:

   (i) $\sin\frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ (ii) $x\sin\frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$

   (iii) $\frac{\cos(x^3)}{x}$ στο $(1, +\infty)$ (iv) $\sqrt[3]{x}$ στο $[0, +\infty)$

8. Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής και περιοδική συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.