Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2022-23 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 4.

1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι αν $\int_a^b f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

   Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

5. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

6. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

   για κάθε $x, y \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\Big| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \leq \frac{M}{2n}$$

   για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

7. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση και έστω $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία $\gamma_n = \Big(\int_a^b [f(x)]^n dx\Big)^{1/n}$ συγκλίνει και $\lim \gamma_n = M$.