Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2023-24 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 1.

1. Να βρεθούν τα $\liminf$ και $\limsup$ της ακολουθίας
$$a_n = \cos(\frac{n\pi}{2}) + (-1)^n + \frac{1}{n}$$

2. Έστω (a_n) μία ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η (a_n) συγκλίνει.

3. Να δειχθεί ότι αν
$$\lim a_n = a \ , \qquad \limsup b_n = b$$
τότε $\limsup(a_n + b_n) = a + b$.

4. Άσκηση 15 των σημειώσεων ΑΓ.

5. Έστω (a_n) και (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε ότι
$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \\ \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n \ .$$

6. Έστω (a_n) για την οποία υπάρχει $\mu \in (0,1)$ ώστε $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \mu |a_{n+1} - a_n|$, για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

7. Άσκηση 20 των σημειώσεων ΑΓ.

8. Έστω (a_n) μία ακολουθία και (x_k) ακολουθία της οποίας οι όροι είναι οριακά σημεία της (a_n). Δείξτε ότι αν $x_k \to x$, τότε και το x είναι οριακό σημείο της (a_n).

9. (α) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε σημείο του A είναι οριακό σημείο. (β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) για την οποία κάθε πραγματικός αριθμός είναι οριακό σημείο.