Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2023-24

Ασκήσεις 5.

1. Άσκηση 2 σημειώσεων ΑΓ.

2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση στο και $g : [a,b] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$h(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt\,.$$

3. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ μία διαμέριση του $[a,b]$ και $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Να δειχθεί ότι
$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)|dx$$

4. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0) = 0$. Να δειχθεί ότι
$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}, \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

5. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_n = \int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ είναι μηδενική.

6. Να βρεθεί για ποια $\beta \in \mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}\,.$$

7. Να βρεθεί για ποια $\alpha \in \mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{x+2}\right)dx$$

8. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνήσια αύξουσα συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)\,, \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

9. Άσκηση 9 σημειώσεων ΑΓ.

10. Αποδείξετε το κριτήριο του Dirichlet για γενικευμένα ολοκληρώματα: αν οι συναρτήσεις $f, g : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ είναι συνεχείς, η παράγουσα της f είναι φραγμένη και η g είναι φθίνουσα και $\lim_{x\to+\infty} g = 0$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ υπάρχει. [*Υπόδειξη.* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του Cauchy για σύγκλιση συναρτήσεων: Έστω $q : [0,\infty) \to \mathbf{R}$. Το όριο $\lim_{x\to+\infty} q(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K > 0$ ώστε αν $x_1, x_2 > K$ τότε $|q(x_1) - q(x_2)| < \epsilon$.]

11. Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ υπάρχει.