ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ – 18.09.2024

ΤΜΗΜΑ ΔΙΑΜΑΝΤΗ–ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ (2023–2024)

Διάρκεια: 3 ώρες. Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες.
Οδηγίες: Χρησιμοποιήστε πρόχειρο, **καθαρογράψτε τις λύσεις σας και αριθμήστε τις κόλλες σας!**

Θέμα 1 [10 μονάδες]. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) η τιμή του ορίου $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$. ❦

Θέμα 2 [10 μονάδες]. Έστω η συνάρτηση $Z(x,y) = \log(e^x + e^y)$.

(α′) Δείξτε ότι το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης της Z ως προς το $(0,0)$ είναι $Z_1(x,y) = \log 2 + \frac{1}{2}(x+y)$.

(β′) Υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή $\log \frac{e^{1.01}+e^{0.97}}{2}$. ❦

Θέμα 3 [15 μονάδες]. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = (3-x)e^x + (5-y)e^y$.

(α′) Υπολογίστε τη βαθμίδα $\vec{\nabla} f(x,y)$ της f.

(β′) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της $f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $e^x + e^y = 1$. ❦

Θέμα 4 [15 μονάδες]. Έστω το τριγωνικό χωρίο $\Delta = \{(x,y) : x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

(α′) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_\Delta (x+y)\, dA$.

(β′) Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\iint_\Delta [f(x)+f(y)]\, dA = 2\int_0^1 f(u)(1-u)\, du$.

(γ′) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_\Delta \left[e^{-(x-1)^2} + e^{-(y-1)^2} \right] dA$. ❦

Θέμα 5 [25 μονάδες]. Έστω C η κλειστή καμπύλη με εξίσωση

$$C = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \qquad \text{(Ελλειψη)}$$

(α′) Να βρεθεί μία απλή παραμετρική έκφραση για την C.

(β′) Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\oint_C x\,dy$ και $\oint_C y\,dx$ κατά μήκος της C.

(γ′) Να εξηγηθεί (με χρήση του θεωρήματος Green) η σχέση μεταξύ των δύο ολοκληρωμάτων. Να υπολογισθεί το εμβαδόν A της περιοχής του επιπέδου, D, την οποία περικλείει η καμπύλη C. ❦

Θέμα 6 [25 μονάδες].

(α′) Δίδεται το τριγωνικό χωρίο $S = \{(x,y,z) : 2x+y+z-2 = 0$ και $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Να ευρεθούν το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ το κάθετο στο χωρίο και το στοιχείο της επιφάνειας ds το οποίο συνάγεται από την εξίσωση του χωρίου.

(β′) Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = xz\,\hat{\imath} + xy\,\hat{\jmath} + 3xz\,\hat{k}.$$

Να υπολογισθεί με τη χρήση του θεωρήματος Stokes το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl}$, όπου C το σύνορο του τριγωνικού χωρίου.

(γ′) Εάν $\vec{F}$ συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο και S απλή, λεία και κλειστή επιφάνεια, να δείξετε ότι

$$\oiint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{ds} = 0,$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss. Για μία πολύ απλή επιφάνεια, π.χ. σφαίρα, να δειχθεί με χρήση του θεωρήματος Stokes. ❦

Καλή επιτυχία!