

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ " $<$ " το οδικο διατεταγμένο πηήρες οαδα
πραγματικών αριθμών

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

διατεταγμένη n -άδα πραγματικών αριθμών ①

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ = σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων

στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ②

• είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ από η πρόσθεση
δω πραγματικών και είναι πραγματικό αριθμό

• Η πρόσθεση: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$

⊛ Αυτές οι διατεταγμένες n -άδες ονομάζονται και διανύσματα.

Ιδιότητες της πρόσθεσης.

$$\Pi_1: \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$\Pi_2: \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$$

$$\Pi_3: \exists \vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Pi_4: \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists -\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{ώστε } \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

→ ο πολλαπλασιασμός δίνει με βαθμωτό κλειδί
δηλαδή με πολλαπλασιασμό αριθμό.

Ιδιότητες Βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

$$\text{B}\Pi_1 : \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{B}\Pi_2 : (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{B}\Pi_3 : (\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x}) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{B}\Pi_4 : 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

! Σημείωση : Δεν $\mathbb{R}^n$ δεν μπορεί να οριστεί επιμετρικός πολλαπλασιασμός όπως στο $\mathbb{R}$ και επίσης δεν ορίζεται ολική διάταξη όπως στο $\mathbb{R}$ πληρώντας όλες τις ιδιότητες.

Αν για ένα εικότο X ισχύουν οι $n_1 - n_4$ ποσότητες $\oplus$ και $\odot$ (BΠ) τότε πρόκειται για διανυσματικό χώρο

→ Ένας διανυσματικός χώρος έχει Βαση.

$$\text{Βαση (κανονική)} \quad \left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned} \right\} \in \mathbb{R}^n$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \rightarrow \text{δηλ. παράγωγο } \mathbb{R}^n \quad \left. \begin{aligned} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \} \text{ γραμμικά ανεξάρτητα.} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \} = \text{Βαση}$$

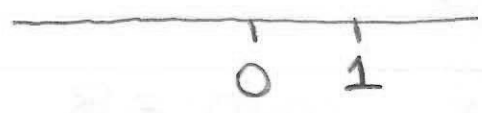
→ Άρα ο $\mathbb{R}^n$ είναι δ.χ διάσταση n .

3

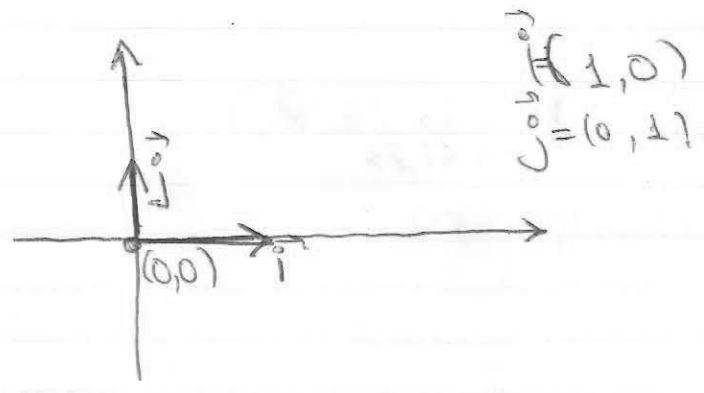
Ανάλυση II

Παράδειγματα σε διάφορες διαστάσεις.

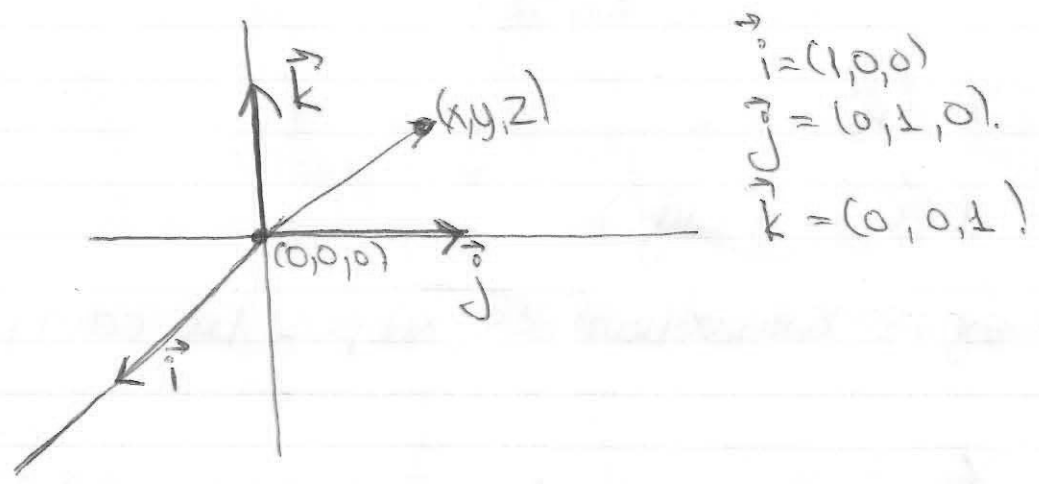
• $n=1$



• $n=2$



• $n=3$



• Στην καθημερινότητα μας χρησιμοποιούμε αποστάσεις άρα η θέση δεν αρκεί και χρειαζόμαστε την έννοια της απόστασης /μέτρου.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ

! Αν έχουμε ορίσει τη μονάδα στο χώρο μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε την απόσταση.

Αρχικά ορίζουμε την έννοια του εσωτερικού γινομένου.

(4)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Εσωτερικό γιν.: $\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(εξ ορισμού)
 $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

$$(\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R})$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

1) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

$\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (είναι μεταθετικό διότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο $\mathbb{R}$)

3) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

4) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$

► Άρα ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

! Σημείωση: $X = \delta \cdot x$ και $\langle, \rangle = \text{αντικείμενο } x \times x \rightarrow \mathbb{R}$
 με τις ιδιότητες (1-4) τότε ο X ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις

① (Άνισωμα των Cauchy-Schwarz)

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \cdot \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}}$$

Σημείωση: $|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

Λύση: $\lambda \in \mathbb{R}$

• αν $x=0$ ή $y=0$ ισχύει. ($0=0$)

• $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ $(\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \geq 0$

οπώς από τις ιδιότητες του ε.γ. ισχύει:

→ κριτήριο

Απόδειξη II

$$\textcircled{B} = \vec{a}(\vec{x} \cdot \vec{x}) + 2\vec{a}(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}$$

και ευσχρόνως $(\vec{x} \cdot \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq 0)$

Άρα θα πρέπει $\Delta \leq 0$

$$\Delta = 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - 4(\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y}) \leq 0$$

δηλαδή θα πρέπει $(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y})$

Άρα $|\vec{x} \cdot \vec{x}| \leq \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \cdot \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}}$

Ευκλείδεια μετρική (ή νόρμα ή μέτρο)

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{x}\| =: \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$(\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$$

Ιδιότητες

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$
 $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

ii) $\|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|, \quad a \in \mathbb{R}$

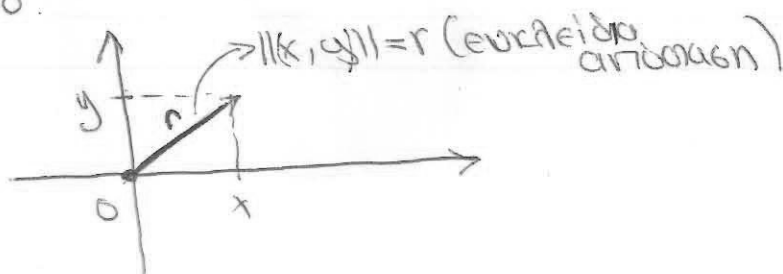
iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ * να αποδειχτεί με χρήση Cauchy Schwarz
 (τριγωνική ανισότητα)

Σε διάφορες διαστάσεις

• $n=1$ $\|x\| = |x|$ απόσταση

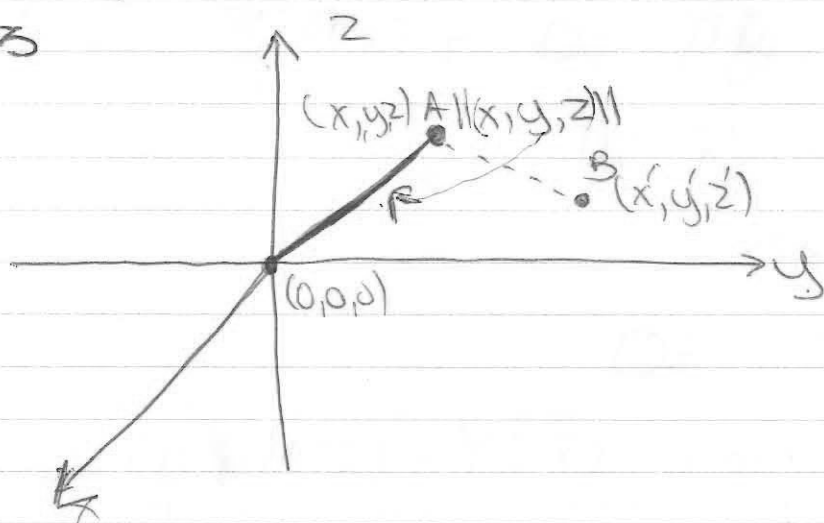


• $n=2$ $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



6

• $n=3$



Απόσταση $A, B = \|AB\| = d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

! Σημείωση

200 δ. x. $\mathbb{R}^n$ ορίζονται πολλές νόρμες.
 $n \cdot x \quad \|\vec{x}\|_p = \sum_{i=1}^n (|x_i|)^p, \quad p \geq 1 \quad (p\text{-νόρμα})$

• Για $p=2$ προκύπτει για την ευκλείδεια μετρική (νόρμα).

• Για $p=1$ και $n=2$ είναι η απόσταση $d_1(x,y)(x',y') = |x-x'| + |y-y'|$.

