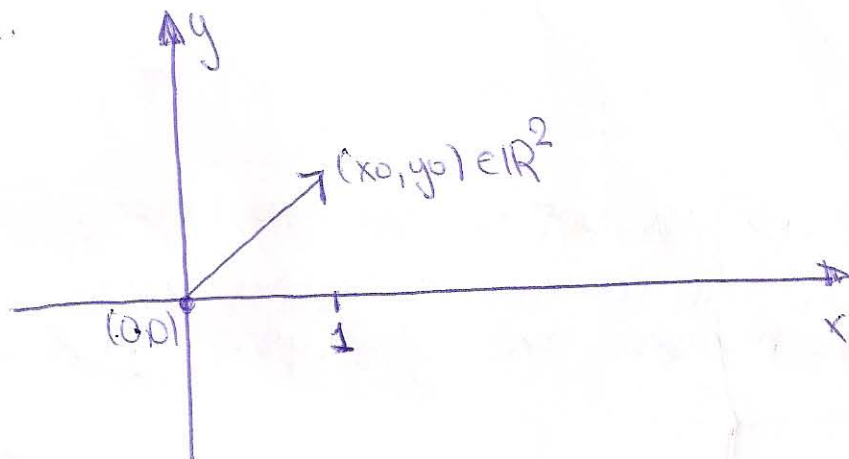


Δείχνει $\mathbb{R}^n$ έχουμε τον $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο) στον οποίο ορίζεται η μονάδα.



⊗ Ανάλυση και στο χώρο ($\mathbb{R}^3$).

Κατευθυνόμενα εὐθύγραμμα τμήματα ή Εφαρμοστές Διανύσματα ή Γεωμετρικά Διανύσματα

→ Παράδειγμα χρήσιμο στη φυσική

→ θέλουμε να απεικονίσουμε την ηλεκτρική δύναμη από την $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^3$. (Είναι αλήθεια πρόκειται για απεικόνιση $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)



δεν είναι διανύσματα αφού δεν αρχίζει από την αρχή των αξόνων.

Άρα ομοίως για τα A, B :



κατευθυνόμενα τμήματα με αρχή A και πέρας B

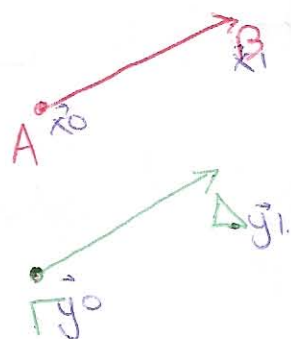
! Τα πεδία δυνάμεων τα φανταζόμαστε με τη βοήθεια των εφαρμοσμένων διανυσμάτων.

$$A: \vec{x}_0$$

$$B: \vec{x}_1$$

$$\Gamma: \vec{y}_0$$

$$\Delta: \vec{y}_1$$



8

$$\text{Πότε } \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta};$$

→ Θα πρέπει να έχουν ίδια φορά και ίδιο μήκος.

! Για να ορίσουμε όμως την ιδιότητα θα πρέπει να τα αναγράψουμε σε διανύσματα πρώτης μορφής π.χ. $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \vec{y}_1 - \vec{y}_0} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{*}$$

Όποιως είναι αντίθετα αν αλλάξουμε τα πρόσημα.

* Πληροφορούμαστε από τη σχέση 1 ότι τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν το ίδιο μέτρο.

Άσκηση:

$$1) A(0,0) = \vec{x}_0 \quad B(3,4) = \vec{x}_1 \quad \text{ισχύει } \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} ?$$

$$\Gamma(-4,2) = \vec{y}_0 \quad \Delta(-1,6) = \vec{y}_1$$

Ναι: Για να είναι $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ εξοριστός θα πρέπει:

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \vec{y}_1 - \vec{y}_0 \Leftrightarrow (3,4) - (0,0) = (-1,6) - (-4,2)$$

$$\Leftrightarrow (3,4) = (3,4) \quad \checkmark$$

$$\text{Ισχύει η ιδιότητα άρα } \boxed{\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}}$$

→ Για το επόμενο

$$2) A(0,0,0), B(3,4,5) \quad \vec{AB}$$

Ποιό πρέπει να είναι το Δ ώστε $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB}$ αν $\Gamma(1,2,3)$

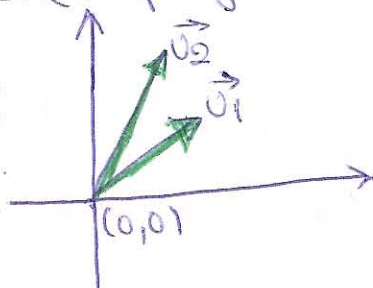
! $\Rightarrow$ Η γωνία ορίζεται ~~με~~ μονοσήμαντα

• Όπως το μέτρο της ορίζεται με 3 διαφορετικούς τρόπους

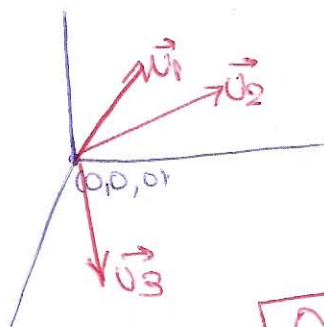
Η έννοια της γωνίας

Έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα (παράγουν) το χώρο.

στον $\mathbb{R}^2$:



στον $\mathbb{R}^3$:



Ορισμός γωνίας

Κενός διανυσματικός (του χώρου).

$$\angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \left\{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n : \lambda_i \geq 0, i=1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

(α) Γεωμετρικός τρόπος

Μέτρηση γωνίας μεταξύ 2 διανυσμάτων του χώρου

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε να $\vec{u}, \vec{v}$ με κοινή αρχή την αρχή και $\vec{u}$ αξονικός και θέτουμε να $\vec{u}$ με μήκος 1.

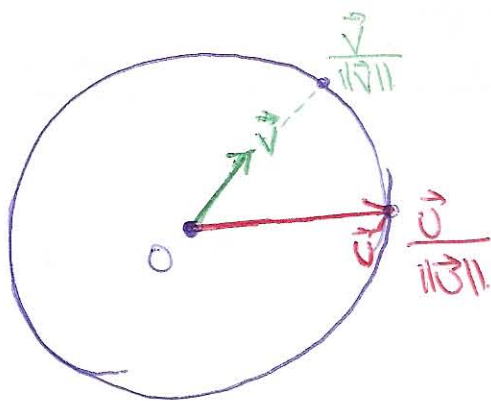


• Η μέτρηση της γωνίας γίνεται με τη βοήθεια κύκλου ακτίνας $r=1$

• $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u}, \vec{v}$ γραμμ. ανεξάρτητα τότε ορίζουν ένα επίπεδο ($\in \mathbb{R}^2$)



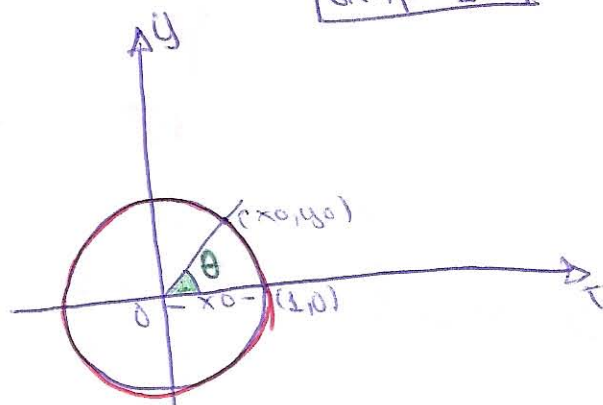
$$r=1$$



μέτρο $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ = μήκος μικρότερου τόξου που ενώνει τα σημεία $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ και $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. (Εδώ σου έχω μονάδα στο χώρο μπορεί να ληφθεί το μήκος).

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Εκείμα 1



► Εαν έχουμε μια γωνία θ (βλ. Εκείμα 1) $(0 \leq \theta \leq \pi)$

ορίζουμε $x_0 = \cos \theta$ ($f(\theta) = x_0, f^{-1}(x_0) = \theta$)
τότε μπορείτε να αποδείξετε τους
τριγωνομετρικούς τύπους.

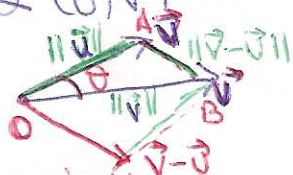
(π.χ. $\eta^2 \theta + \epsilon \omega^2 \theta = 1$, $\epsilon \omega 2\theta$, νόμο των
συνημιτόνων, κ.τ.λ.)

(β) Μέσω εσωτερικού γινομένου

Θεώρημα

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$



Απόδειξη:

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

• Κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο

• Γνωρίζουμε τα μέτρα και πλευρές του $\triangle OAB$ άρα κάνουμε
χρήση του νόμου των συνημιτόνων. δηλ: $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta$ (1)

όμως το $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2$ είναι το εγός εσωτερικό γινόμενο

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι Παράσημα 20

(1)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

Σημείωση: Το μέτρο μιας γωνίας θ μπορεί να οριστεί με τιν

(i) γεωμετρικό τρόπο

ii) μέσω του ορισμού του εσωτερικού γινομένου

$$\text{δηλ. } \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$$

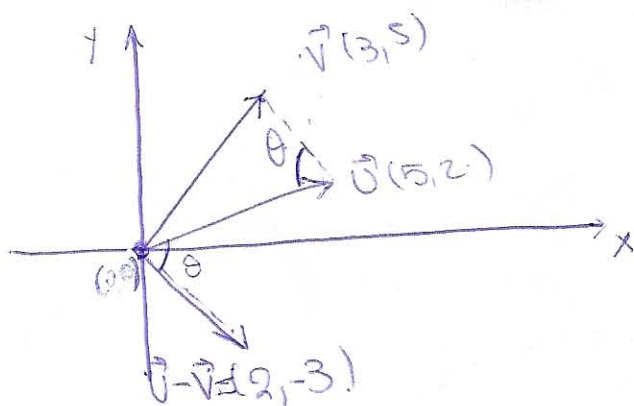
iii) με το ανάπτυγμα Taylor του συνήθους

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-1)^n}{(2n)!}$$

Ασκήσεις

1. $\vec{u} = (5, 2)$, $\vec{v} = (3, 5)$

$\theta = ?$ (6x4, 4τος v)



$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{u} - \vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29} \sqrt{13}}$$

$$\theta \approx 1,36 \approx 78,1^\circ$$

- ① → Για το ερώτημα
 Να υπολογιστεί η συνιστώσα παράγωγη των

$$\vec{u} = (1, -2, -2)$$

$$\vec{v} = (6, 3, 2)$$

$$\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \quad (\cos \theta = -\frac{4}{21})$$

Κρίθεται ή ορθογωνία διανύσματα.

- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι κρίθεται $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ειδικά: $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} : \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

Ασκήσεις

① $\vec{u}, \vec{v} \quad \vec{u} = (3, -2) \quad \vec{v} = (4, 6)$

Λίγη

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (3, -2) \cdot (4, 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ ισχύει άρα}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Για το ερώτημα

② $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{v.d.o} \quad \vec{u} \perp \vec{v}$
 $\vec{v} = -10 + 5\vec{j}$

③ Έστω $\vec{u} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} \perp \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= (v_2 v_3 - v_3 v_2) \hat{i} - (v_1 v_3 - v_3 v_1) \hat{j} + (v_1 v_2 - v_2 v_1) \hat{k}$$

ISOLANTES

① $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

(2) $\vec{0} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{0})$ (!)

(iii) $(a\vec{v}) \times \vec{v} = a(\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{0}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$(iv) \vec{U} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{U} \times \vec{v}_1 + \vec{U} \times \vec{v}_2$$

$$\textcircled{V} \quad \vec{x} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x}$$

$$\textcircled{vi} \quad \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z}$$

Agenda

$$\overline{1 \times 1} = \overline{j \times j} = \overline{k \times k} = 0$$

$$1 \times 10^{-10} = 10^{-10}$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

