

Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =: \begin{pmatrix} \text{όπως} & \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ & \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{pmatrix}$$

$$=: (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}$$

Γεωμετρική σημασία του εξ. γινομένου - εμβαδόν παραλληλογράφου

(1) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

(2) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}, \vec{v})^2$ (Ταυτότητα Lagrange)

(3) $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta, \quad \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Ιδιότητα $\vec{u}, \vec{v} = \text{γραμ. εξαρ.} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0})$



$$E = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

(4) $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ το $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι **υόθετο** στο $\vec{u}, \vec{v}$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράφου που δημιουργούν το $\vec{u}, \vec{v}$ και $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{u} \times \vec{v})$ είναι δεξιόστροφο ($\vec{u}, \vec{v} = \text{γραμ. ανεξ.}$) σύστημα.

Απόδειξη

(1) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$

$$\text{Έχουμε } (u_1, u_2, u_3) \cdot [(u_2 v_3 - u_3 v_2), (u_3 v_1 - u_1 v_3), (u_1 v_2 - u_2 v_1)] = \dots = 0$$

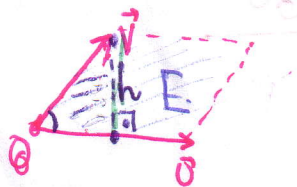
Ομοίως $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

(2) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}, \vec{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2$$

με πράξη καταλήγουμε στο ζητούμενο

8)+(4)



$$E = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \|\vec{u}\| \cdot h$$

14

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\angle(\vec{u}, \vec{v}))) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \end{aligned}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \quad (2) \quad (0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi)$$

Ομοίως $E = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ (1)=(2)

Άσκησης

(1)

P: $\vec{x}_1 = (1, -1, 0)$

Q: $\vec{x}_2 = (2, 1, -1)$

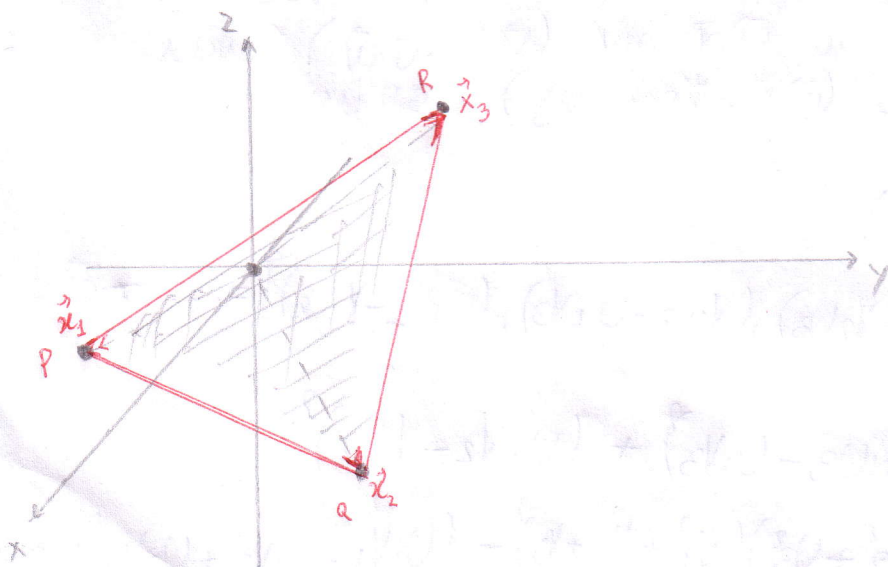
R: $\vec{x}_3 = (-1, 1, 2)$

Να βρεθεί διανυσμα κάθενο στο επίπεδο που ορίζουν τα (P, Q, R).

Λύση: $\vec{v} \perp (\vec{x}_3 - \vec{x}_1, \vec{x}_2 - \vec{x}_1) \Rightarrow \vec{v} = (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \dots = (6, 0, 6)$

(2) E περιγράψει PQR (ρω 1)

$$E = \frac{1}{2} \|(\vec{x}_3 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 0 + 36} = 3\sqrt{2}$$



• Μερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

$$\left. \begin{aligned} \vec{U} &= (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{V} &= (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{W} &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned} \right\} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Μερικό γινόμενο: } \vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες :

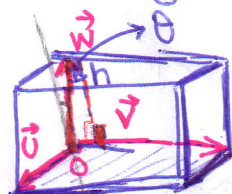
$$|\vec{U} \cdot (\vec{V} \times \vec{W})| = |\vec{V} \cdot (\vec{U} \times \vec{W})| = |\vec{W} \cdot (\vec{U} \times \vec{V})|$$

* Σημείωση! Η απόλυτος τιμή δείχνει αλληλεπί με αλλαγής σειράς των διανυσμάτων της ορίσματος.

• Γεωμετρική σημασία, Όγκος παραλληλεπίπεδου

$\vec{W}, \vec{V}, \vec{U}$ γραμμικά ανεξάρτητα

$$\theta = \angle((\vec{U} \times \vec{V}), \vec{W})$$



Αναζητείται ο όγκος του παραλληλεπίπεδου:

$$V = E(\text{Basis}) \cdot h$$

$$E(\text{Basis}) = \|\vec{U} \times \vec{V}\| \quad (\text{βλ. 4.11}) \Rightarrow \text{όρα}$$

$$h(\text{υψος})^* = \|\vec{W}\| |\cos \theta|$$

$$\begin{aligned} V &= \|\vec{U} \times \vec{V}\| \cdot \|\vec{W}\| |\cos \theta| = |(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W}| = \\ &= \left| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right| \end{aligned}$$

! Σημείωση !

- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ γραμμικά εξαρτημένα

$$\Leftrightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

(16)

- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ γραμ. εξαρτημένα $\Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ γρ. εξαρτημένα όταν $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

Στοιχεία Τοπολογίας στον $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

Ορισμοί I

- (i) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$S(\vec{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

ανοικτή σφαίρα του $\mathbb{R}^n$
κέντρου $\vec{x}_0$, ακτίνας r ή περιοχή του $\vec{x}_0$

- (ii) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r \geq 0$

$$S(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}$$

κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^n$
κέντρου $\vec{x}_0$, ακτίνας r

Ορισμοί II

- (i) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow \forall \vec{\alpha} \in A \exists r > 0 \quad S(\vec{\alpha}, r) \subseteq A$$

- (ii) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B = B^c$ είναι ανοικτό

Ορισμοί III

- (i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο $\Leftrightarrow \exists M > 0 : \|\vec{\alpha}\| \leq M \quad \forall \vec{\alpha} \in K$

$$\Leftrightarrow \exists M > 0 : K \subseteq S(0, M)$$

- (ii) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow K = \text{κλειστό} + \text{φραγμένο!!}$

Ορισμός IV

$$A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\partial A = \text{bd} A = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \text{ έχουμε} \}$$

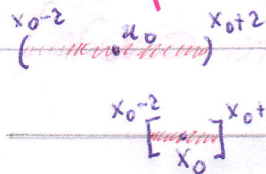
$$S(\vec{x}, r) \cap A \neq \emptyset \text{ και}$$

$$S(\vec{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \}$$

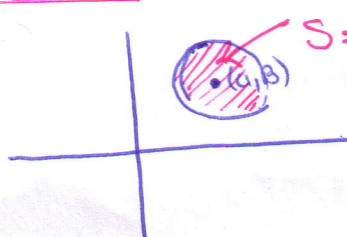
Σφαίρες στον $\mathbb{R}^n$

• Για $n=1$, $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ — ανοικτή σφαίρα (πρακτικά τα ανοικτά διαστήματα)

$$\hat{S}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$$



• Για $n=2$ $S((a,b), r) = \{ (x,y) : \|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \}$



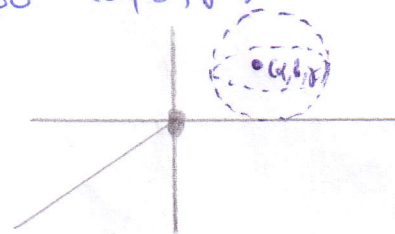
S = τα εσωτερικά σημεία κύκλου κέντρου (a,b) και ακτίνας r .

Ομοίως $\hat{S}$ = κύκλος κέντρου (a,b) και ακτίνας r .

• Για $n=3$

S : σφαίρα (χωρίς τα εξωτερικά σημεία) με κέντρο (a,b,r) και ακτίνα r

$\hat{S}$: σφαίρα κέντρου (a,b,r) και ακτίνα r



!! Η σφαίρα εξαρτάται από το χώρο που βρισκόμαστε !!



Ανοικτά σύνολα - Παραδείγματα

$\mathbb{R}$ • Πρακτικά ανοικτό σύνολο είναι αυτό που σε κάθε σημείο x_0 να προχωρήσω λίγο εμπρός και πίσω (r).

(*) $n=1$ $(a, +\infty)$: ανοικτό $\rightarrow (-\infty, a]$: κλειστό
 (a, b) : ανοικτό $\rightarrow (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$: κλειστό
 $\mathbb{R}$: ανοικτό $\rightarrow \emptyset$: κλειστό.

$\emptyset$: ανοικτό (για κάθε x_0 σημείο που υπάρχει ανοικτή σφαίρα)
 $\rightarrow \mathbb{R}$: κλειστό.

Το σύνολο $[a, b)$ δεν είναι ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό.

($\mathbb{N}$: κλειστό σύνολο)