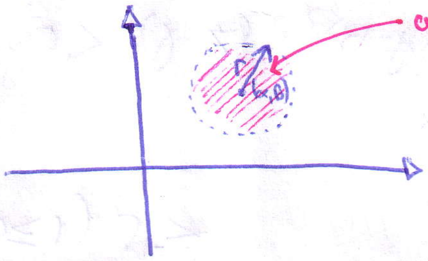
25/2/2009 Ανάλυση ΙΙ Μάθημα 4ο.

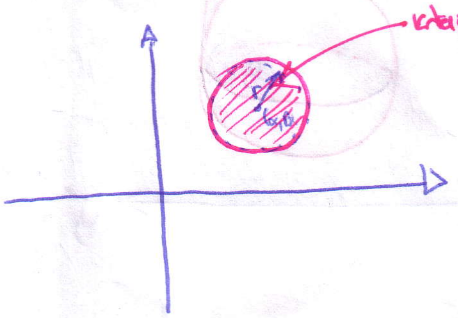
(Συνέχεια μαθ. 3ο)

• $n=2$ $S((\alpha,\beta),r) = \{(x,y) : (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 < r^2\}$ $(r>0)$

$\bar{S}$ $\leq$ $(r\geq 0)$



ανοιχτό σύνολο

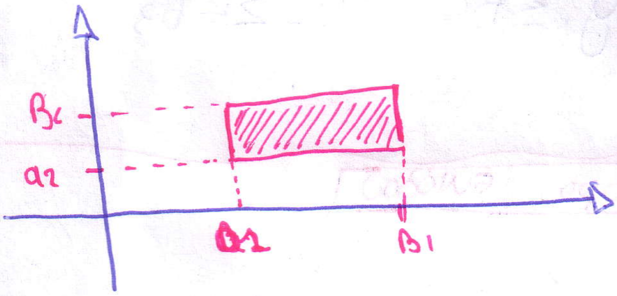


κλειστό σύνολο (διότι περιέχει και τα σημεία της περιφέρειας)

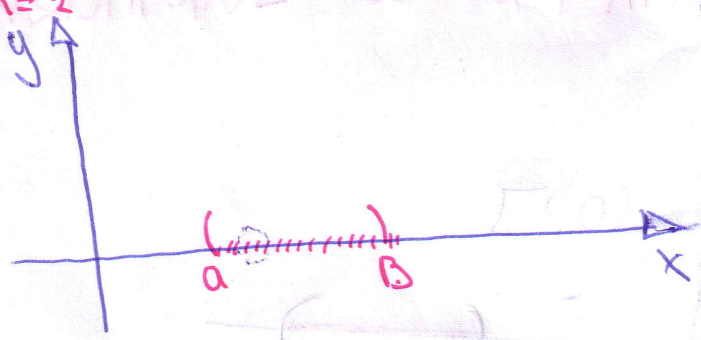
Καρτεσιανό γινόμενο:

$B=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2] = \{(x,y)\ \alpha_1\leq x\leq \beta_1,\ \alpha_2\leq y\leq \beta_2\}$

Κλειστό σύνολο



• $n=2$



Στον $\mathbb{R}$ το (α,β) ήταν ένα ανοιχτό σύνολο

Στον $\mathbb{R}^2$ το (α,β) είναι ανοιχτό ?;

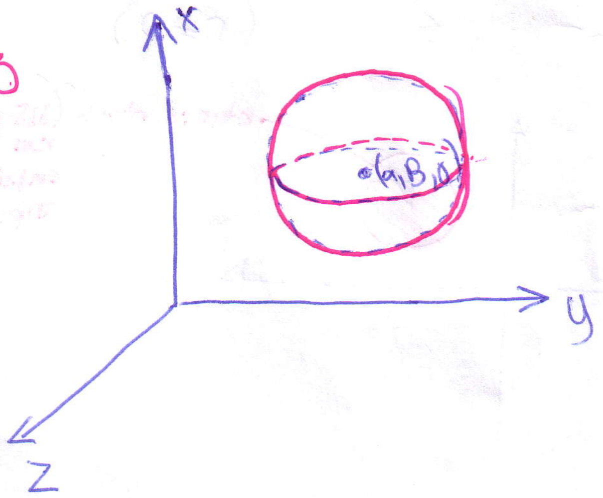
Απάντηση: δεν είναι ανοιχτό, $A=\{(x,y): x\in(\alpha,\beta),\ y=0\}$

(! δεν μπορούμε να θέσουμε σε ένα ευθύγραμμο σχήμα ένα κύκλο)

Παρατήρηση

! Αν ένα σύνολο είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}$ **δεν** είναι απαραίτητο να είναι ανοιχτό και στον $\mathbb{R}^n$. Αντίθετα αν ένα σύνολο είναι κλειστό στον $\mathbb{R}$ τότε είναι και στον $\mathbb{R}^n$.

• $n=3$



$S((\alpha,\beta,\gamma),r)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2<r^2\}$

↳ ανοιχτό

$\hat{S}$ . . . . . . $\leq r^2 \, (r\geq 0$

↳ κλειστό.

Ορθογώνιο (παραλληλεπίπεδο). $n=3$

$B=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\times[\alpha_3,\beta_3]=$

$=\{(x,y,z) \quad \alpha_1\leq x\leq\beta_1, \ \alpha_2\leq y\leq\beta_2 \ \ \alpha_3\leq z\leq\beta_3$

↳ κλειστό σύνολο

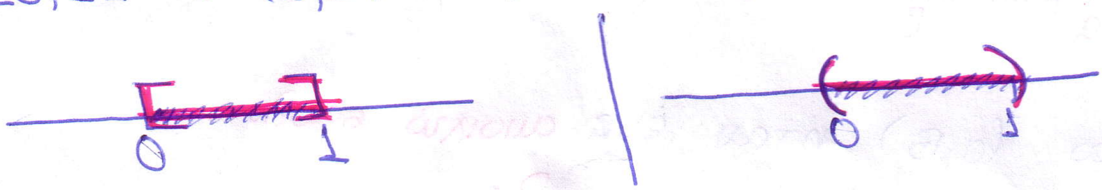
Σύνορο συνόλου

▶ Σύνορο (του A):
$A\subseteq\mathbb{R}$

$\partial A=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \forall \ \varepsilon>0 \ \ S(\vec{x},\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ και $S(\vec{x},\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^n\setminus A$

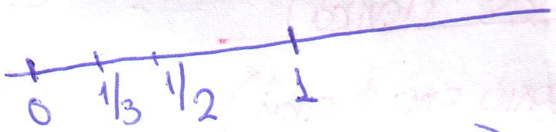
Παραδείγματα

(1) $A=[0,1]$ ή $(0,1)$ ή $[0,1)$ ή $(0,1]$



$\partial A=\{0,1\}$

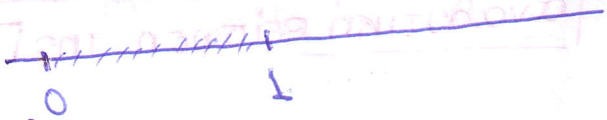
(2)



$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}\}$

$\boxed{\partial A = A \cup \{0\}}$

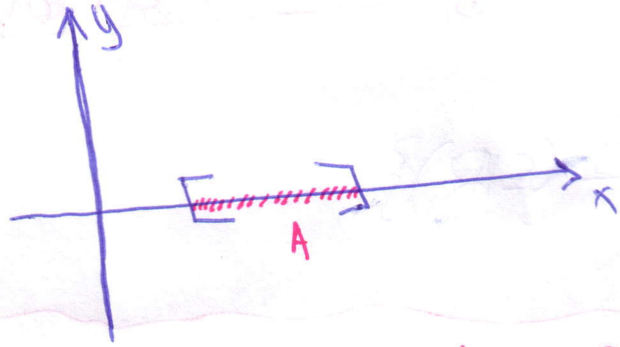
(3) $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$



$\partial A = ;$

$\partial A = [0,1]$

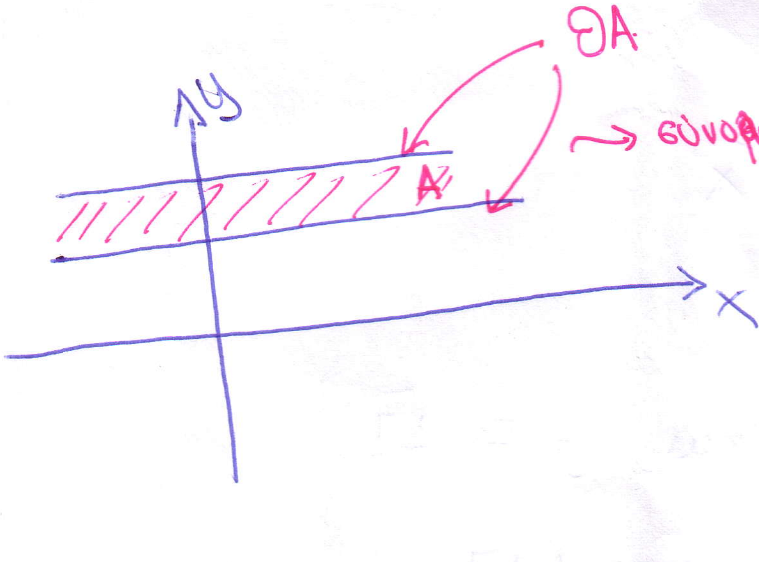
(4)



$\partial A = A$

! Το σύνολο εξαρτάται από το σε ποιον χώρο βρισκόμαστε !

(5)



→ σύνορο εδώ είναι οι δύο παράλληλες ευθείες

• Καμπύλες και επιφάνειες (Γενικά)

(I) Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ (τροχιές στην φυσική)

(*) Μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ μπορεί να οριστεί με άπειρους τρόπους.

• Συμβολίζονται με: Γ

• Περιγράφονται με: ένα σύνολο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y)=0\}$ όπου $F:\mathbb{R}^2\to$
αν ισχύει αυτό είναι η

α) $\boxed{\text{αναλυτική εξίσωση της } \Gamma}$

Ομοίως

• $\Gamma : \{(x,y)\in\mathbb{R} : y=f(x)\}$ όπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

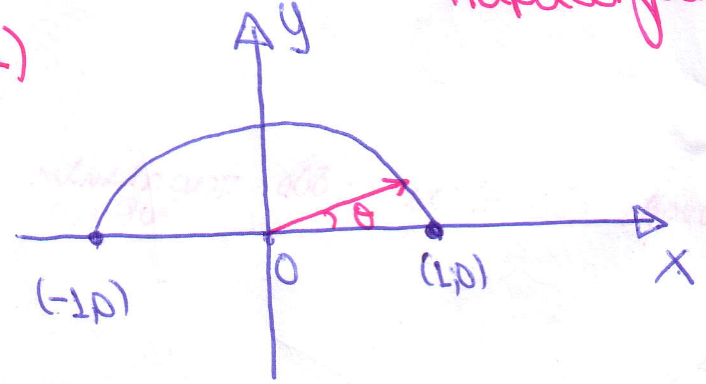
β) $\boxed{\text{καρτεσιανή εξίσωση της}}$

• $\Gamma : \{\vec{r}(t)=(x(t),y(t)),\ t\in I\ (\subseteq\mathbb{R})\}$

γ) $\boxed{\text{Παραμετρική εξίσωση της } \Gamma}$

Παραδείγματα

(1)



(α) Αναλυτική εξίσωση

$x^2+y^2=1$; $x\in[-1,1]$ και $y\in[0,1]$

(β) καρτεσιανή $y=\sqrt{1-x^2}$ $x\in[-1,1]$

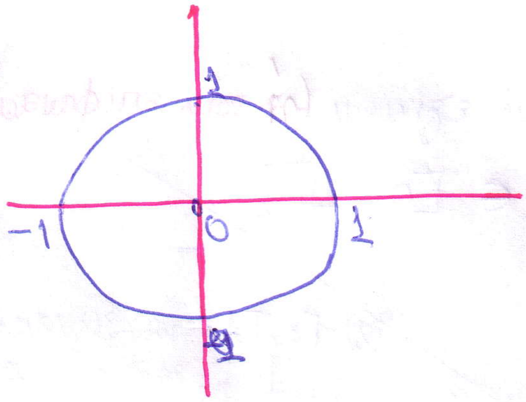
(γ) Παραμετρική $t=x \rightsquigarrow \vec{r}(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$ $t\in[-1,+1]$

ή $\vec{r}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $\theta\in[0,\pi]$ αν $t=\theta$

συνέχεια παραδ. (1.β) σελ. 23

ή $\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu 2t, \eta\mu 2t)$ $t = [0, \frac{\pi}{2}]$ (ή ......)

(2)



(α) Αναλυτική: $x^2+y^2=1$

(β) Καρτεσιανή: δεν υπάρχει.

(γ) Παραμετρική: $\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

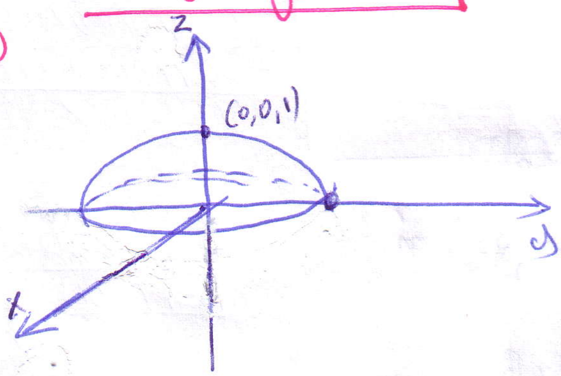
$S: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z)=0\}$: Αναλυτική εξίσωση.

" : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = F(x,y)\}$ (ή $y=g(x,z)$ ή $x=h(y,z)$): Καρτεσιανή

: $\{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)\ z(u,v)\}$: Παραμετρική εξίσωση.

Παραδείγματα:

(1)



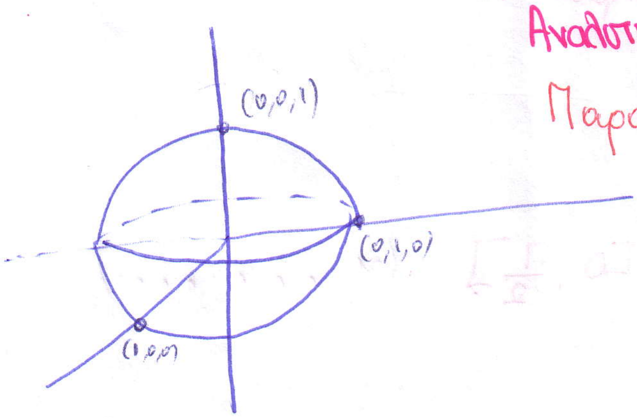
Αναλυτική: $x^2+y^2+z^2=1$ $z \geq 0$

Καρτεσιανή: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $x^2+y^2 \leq 1$

Παραμετρική: $\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$. $x^2+y^2 \leq 1$

(ή ;)

(2) (24)



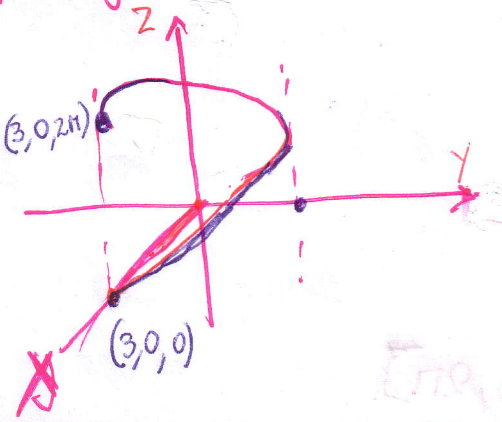
Αναλυτική: $x^2+y^2+z^2=1.$

Παραμετρική (;)

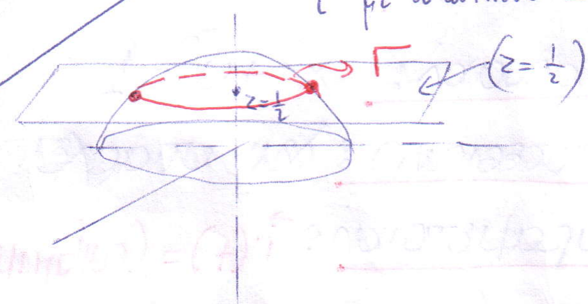
• Καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$

• Γ: { $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ παραμετρική εξίσωση (ή τομή επιφανειών)

Παράδειγμα (1) $\vec{r}(t)=(3\text{συν}t, 3\text{ημ}t, t)$ $\quad t\in[0,2\pi]$

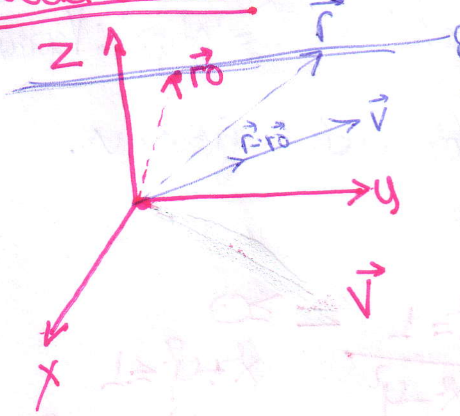


(2) Γ: $\begin{cases} \text{Τομή της } \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\} \\ \text{με το επίπεδο } z=\frac{1}{2} \end{cases}$



• Ειδικές καμπύλες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ •

▸ ευθεία στον $\mathbb{R}^3$



εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το $\vec{r_0}$ παράλληλο του $\vec{v}\neq\vec{0}$

$l: \vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$

$\vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3).$

$(x(t),y(t),z(t))=(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3)$ ή

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t)&=x_0+tv_1 \\ y(t)&=y_0+tv_2 \\ z(t)&=z_0+tv_3 \end{aligned}} \quad t\in\mathbb{R}$$

25/2/2009 Ανάλυση ΙΙ μάθημα 4ο

(συνεχ. σελ.-24) ή $\boxed{\dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}}$. $(v_1, v_2, v_3 \neq 0)$

Παραδείγματα: (1) $\vec{r_0} = (-2,0,4)$

$\vec{v} = (2,4,-2)$

$\vec{r}(t) = (-2,0,4) + t(2,4,-2)$

$x = -2-2t$
$y = 4t$
$z = 4-2t$
$t \in \mathbb{R}$

(2). $\vec{r_0} = (-3,2,-3)$
$\vec{r_1} = (1,-1,4)$ } Ζητείται η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα 2 σημεία.

$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t(\vec{r_1} - \vec{r_0})}$ ....

$\vec{r}(t) = (-3,2,-3) + t(4,-3,7)$, $t \in \mathbb{R}$

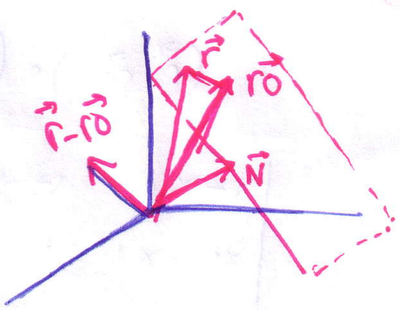
(3) $[\vec{r_0}, \vec{r_1}] = \{(-3,2,-3) + t(4,-3,7) : t \in [0,1]\}$

προκύπτει ότι $t \in [0,1]$ αν αντικαταστήσω τα 0, 1 στην εξίσωση $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t(\vec{r_1} - \vec{r_0})$ που προκύπτουν αντίστοιχα τα $\vec{r_0}, \vec{r_1}$ που ορίζουν το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα.

Επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ $\vec{N} = (A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

Επίπεδο διέρχεται από το $\vec{r_0}$ και $\perp \vec{N}$



$\vec{r} = (x,y,z) \in$ στο επίπεδο (βλ. σχήμα)

δηλαδή $\vec{r} - \vec{r_0} \perp \vec{N}$ δηλ. $(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{N} = 0$

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (A, B, \Gamma) = 0$

$\boxed{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$ όπου $\Delta = -(Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0)$ → εξίσωση επιπέδου

Παραδείγματα

(1) $\vec{r_0} = (-3,0,7)$
$\vec{N} = (5,2,-1)$

εξ. επιπέδου που διέρχεται από το $\vec{r_0}$ και $\perp \vec{N}$

Ισχύει $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

$$\Delta = -(Ax_0+By_0+\Gamma z_0)$$

$$5x+2y-z+\Delta=0$$

$$\Delta = -(5(-3)+0-7) = -15-7 = -22$$

Άρα $\boxed{5x+2y-z-22=0}$ → η ζητούμενη εξίσωση

(2) $\vec{r_1} = (x_1,y_1,z_1)$
$\vec{r_2} = (x_2,y_2,z_2)$
$\vec{r_3} = (x_3,y_3,z_3)$
→ Γραμμικά ανεξάρτητα / Επίπεδο που περνά από 3 σημεία

Ένα κάθετο : $\vec{N} = (\vec{r_1}-\vec{r_2})\times(\vec{r_1}-\vec{r_3})$

(! το κάθετο σε 2 διανύσματα είναι το εξωτερικό τους γινόμενο)

$$(\vec{r}-\vec{r_1})\cdot\left((\vec{r_2}-\vec{r_1})\times(\vec{r_3}-\vec{r_1})\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$