

3.3.2009Κυρτώδεις Επιφάνειες

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = \phi(x, y) = c \}$$

$$\text{ή } (F(x, y, z) = h(x, z))$$

$$\text{ή } (F(x, y, z) = g(y, z))$$

$$\text{ή } (F(x, y, z) = \phi_1(x) \text{ ή } \phi_2(y) \text{ ή } \phi_3(z))$$

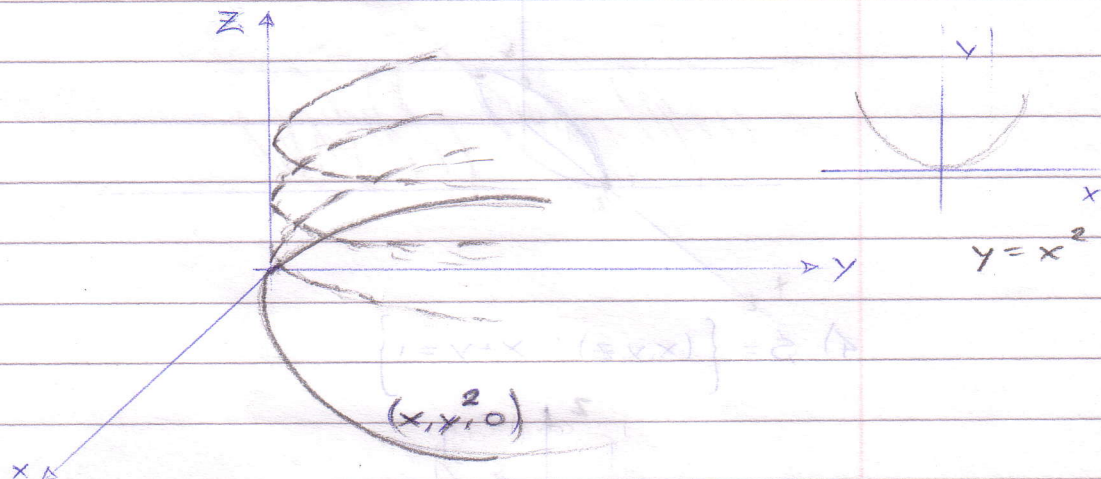
Κυρ. επιφάνειες

Με γινόμενα // στον OZ

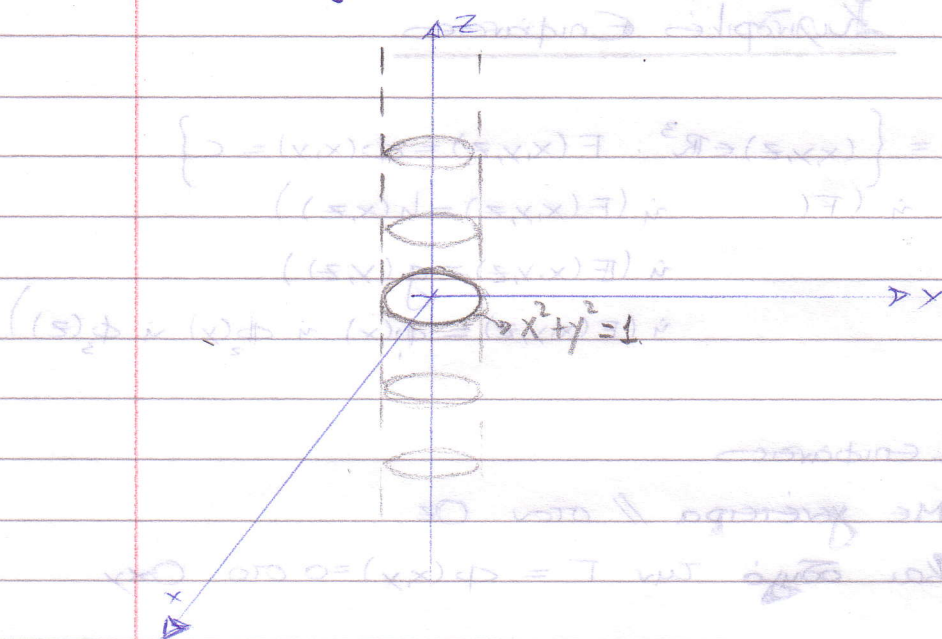
και οδύο των $\Gamma = \phi(x, y) = 0$ στο OxyΠαράδειγμα

$$1. \text{ Έστω } S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 \}$$

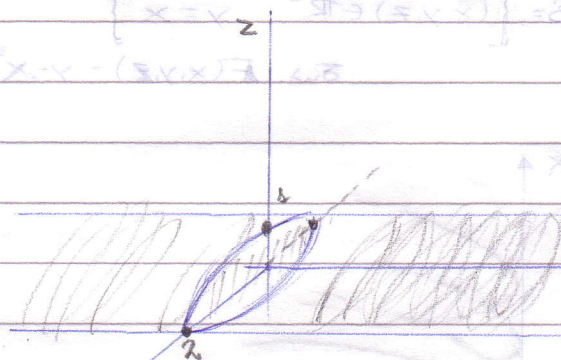
$$\text{δηλ. } F(x, y, z) = y - x^2 = \phi(x, y)$$



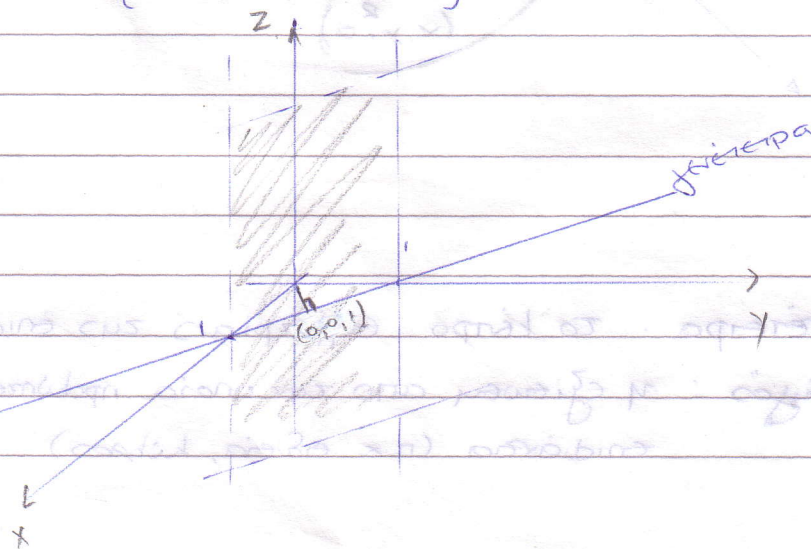
$$2) S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$$



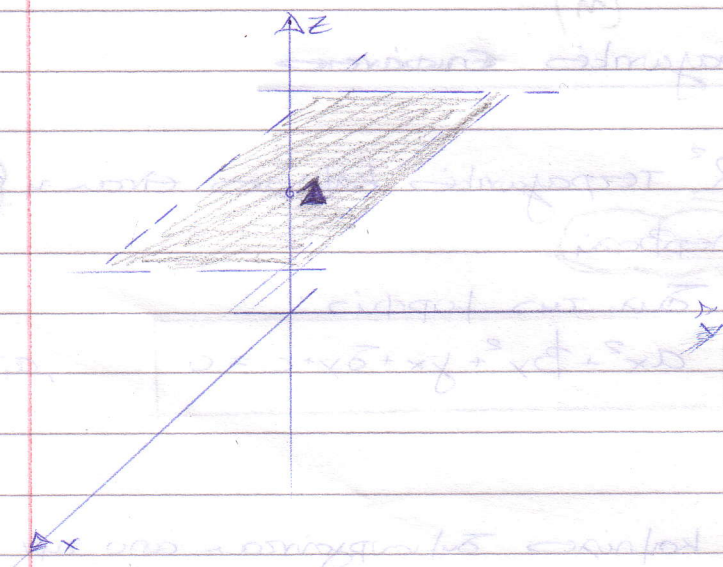
$$3) S = \{(x, y, z) : x^2 + 4z^2 = 4\}$$



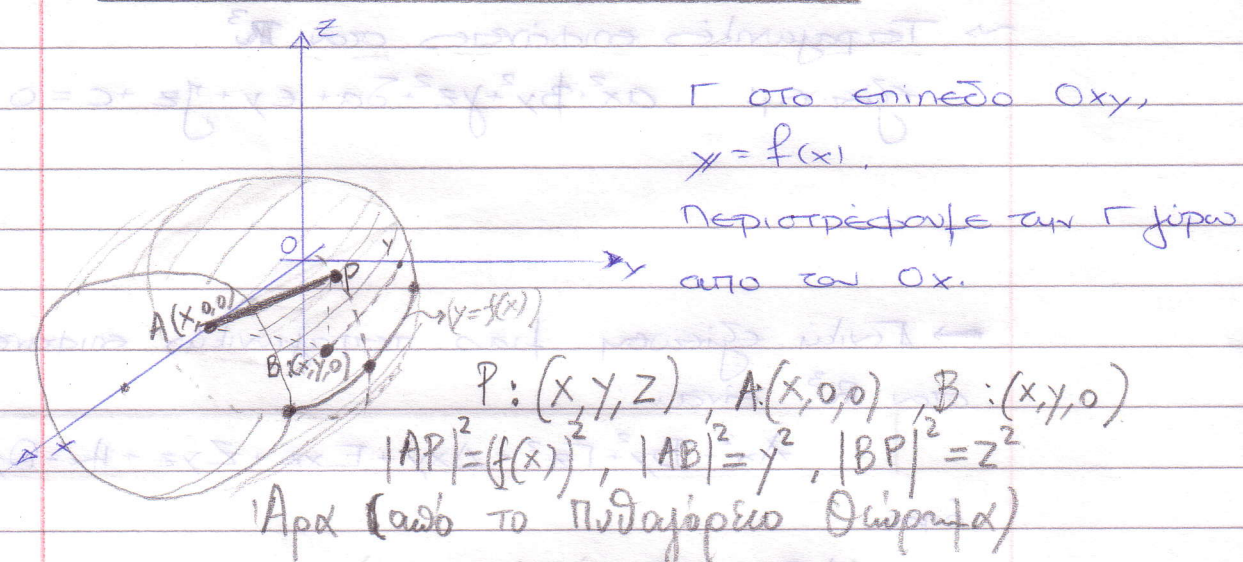
$$4) S = \{(x, y, z) : x + y = 1\}$$



$$5. S = \{(x, y, z) : z=1\}$$



Επιφάνειες εκ περιστροφής



$$y^2 + z^2 = (f(x))^2$$

Εξίσωση των επιφανειών εκ περιστροφής

$$Ox \text{ ως } \Gamma (y = f(x))$$

Επιφάνεια 2^{ης} βαθμίας

(ii)

• Τετραγωνική επιφάνεια

Στον $\mathbb{R}^2$ τετραγωνικές καμπύλες είναι η εξίσωση,
παράβολο, υπερβολή.

Είναι συν. της μορφής:

$$ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + c = 0, a, b \neq 0$$

Οι τρεις καμπύλες διαχωρίζονται από την
"κοπή" ή διαφορετικούς τρόπους ενός συν. κύκλου.

→ Τετραγωνική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$:

Εξίσωση: $ax^2 + by^2 + \gamma z^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta z + c = 0$

→ Γενική εξίσωση μιας τετραγωνικής επιφάνειας
στον $\mathbb{R}^3$ είναι:

$$Ax^2 + By^2 + \Gamma z^2 + \Delta xy + Exz + Zyz + Hx + \Theta y + Kz + C = 0$$

όπου:

$$(A, B, \Gamma, \Delta, E, Z) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Με 7 παραδοχ. αξιόων παίρνει την μορφή:

$$ax^2 + by^2 + \gamma z^2 + a'x + b'y + \gamma'z + c = 0$$

$$(a, b, \gamma \neq 0)$$

Οι Τ.Ε. στον $\mathbb{R}^3$ είναι ακρίβως για από το κάτω:

$$0 < (x \neq 0) \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma} \right)^2 = 1 \right), a, b, \gamma > 0$$

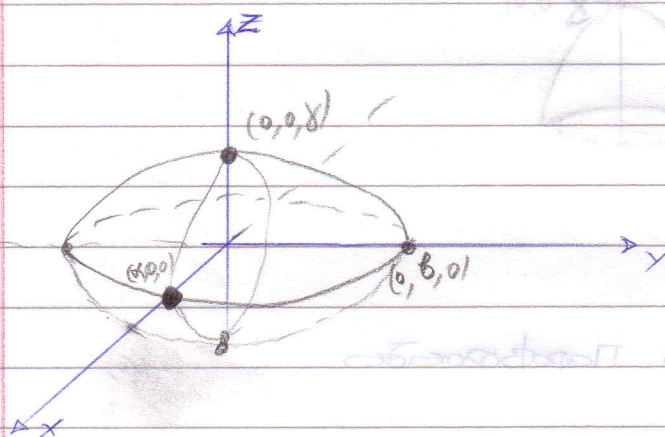
$1 \leq \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma} \right)^2$ - (Εξισώσεις) - (Σω)

ii) Αν $a=b=\gamma$ Τότε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 = b^2 = \gamma^2$$

Εξ. σφαίρας με κ το $k=(0,0,0)$

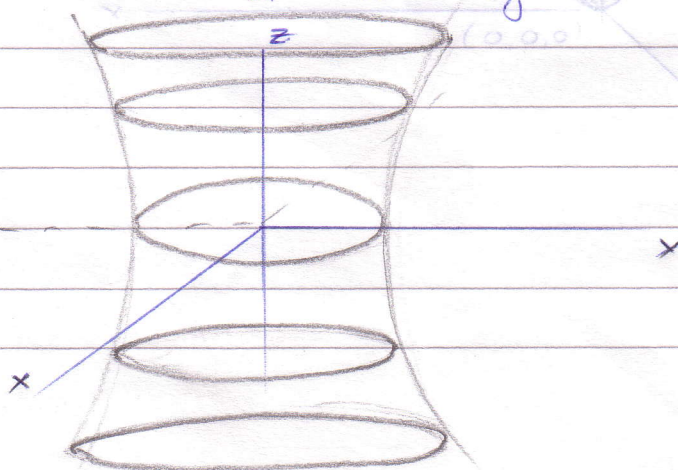
και ακτίνα $\rho=a$



iii) Μανιχαίο Υπερβολοειδές

Εξ.:

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma} \right)^2 = 1 \quad | \text{ με } a, b, \gamma > 0$$

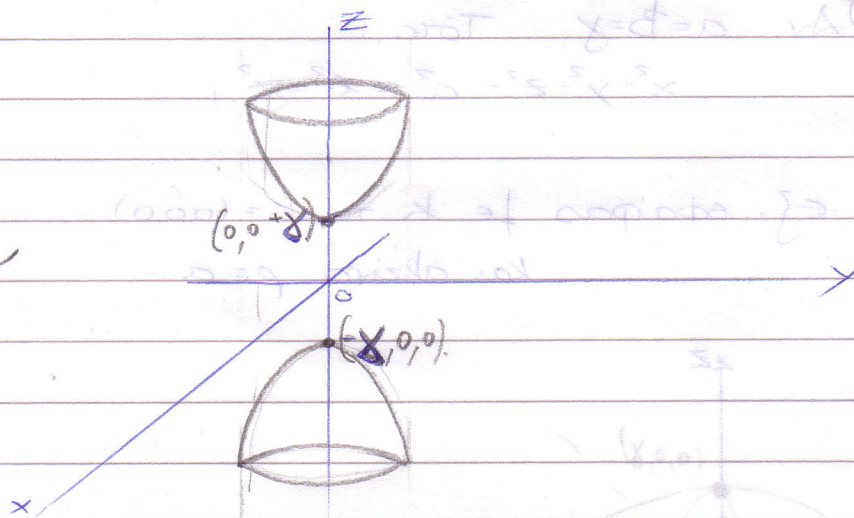


iii) Δίκυπο Υπερβολοειδές

εξ.:

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1 \quad | \in (a, b, \gamma) > 0$$

$$\text{σημ. } \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \geq 1$$

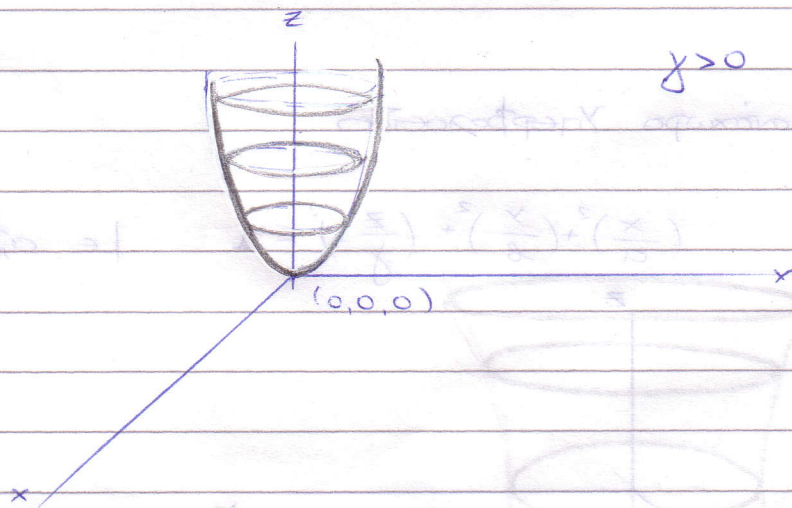


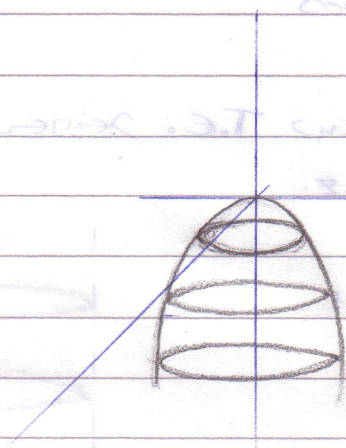
(*)

iv) Σπειρωτικό Παραβολοειδές

εξ.:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{\gamma} \quad , \quad a, b > 0, \gamma \neq 0$$



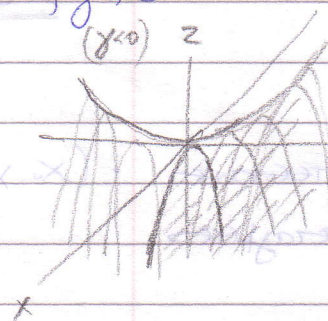


v) Υπερβολικό Παράβολο

εξ:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{\gamma}, \quad a, b > 0, \gamma \neq 0$$

(εξίσωση για $y > 0$ και $y < 0$)
στο e-class

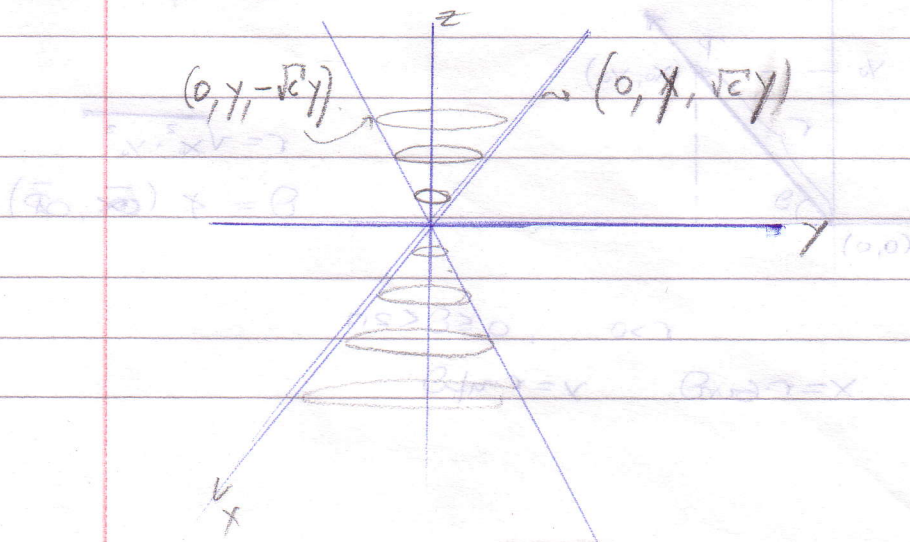


vi) Ελλειπτικές Κώνες

εξ:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2, \quad a, b, \gamma > 0$$

Κώνες: $z^2 = c \cdot (x^2 + y^2), (c > 0)$.

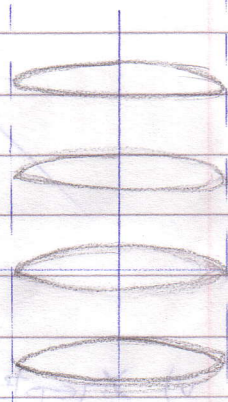


iii) Τετραγωνικός Κισνώρας

Από την εξίσωση του Τ.Κ. λείπει η α μεταβλητή από το x, y, z

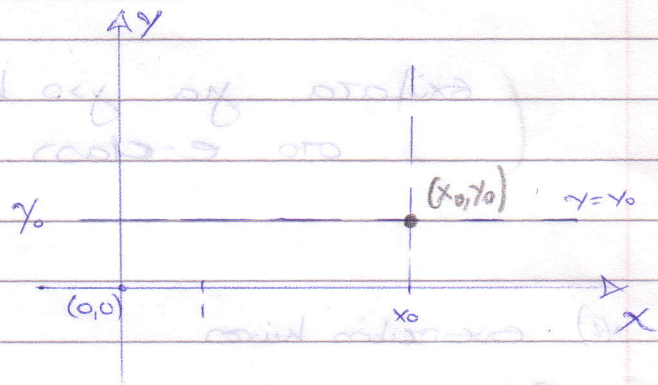
η.α.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

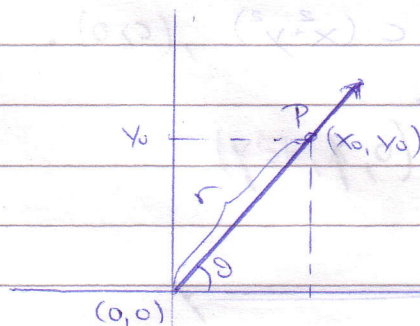


Καρτεσιανές και Πολικές Συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^2$

Καρτεσιανές • $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Συντεταγμένες



Πολικές
Συντεταγμένες



$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\theta = \angle(\vec{ox}, \vec{op})$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$