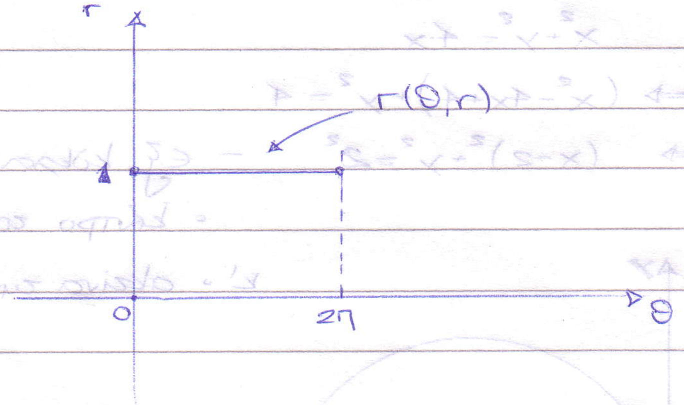
6ο ΜΑΘΗΜΑ

4.3.09 Παραδείγματα

i) Γ: $r=1$ (σε πολικές συντεταγμένες)

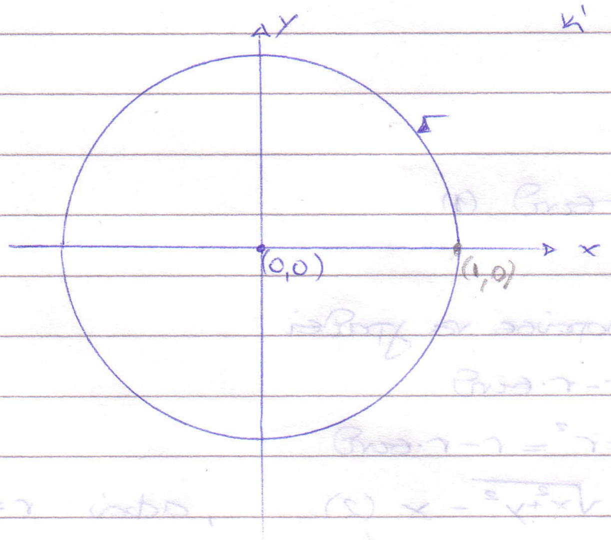
Ζητούμενο: να μετατραπεί σε καρτεσιανές



Ισχύει: $r=\sqrt{x^2+y^2}$

Δηλ. $\sqrt{x^2+y^2}=1$

$x^2+y^2=1$ — εξ. κύκλου με
- κέντρο το $K(0,0)$
- κ' ακτίνα την $\rho=1$



ii) $\Gamma: r^2 = 4 \cdot συνθ \cdot r$

Δηλαδή $x^2+y^2 = r^2 = 4 \cdot r \cdot συνθ$

όμως $x = r \cdot συνθ$

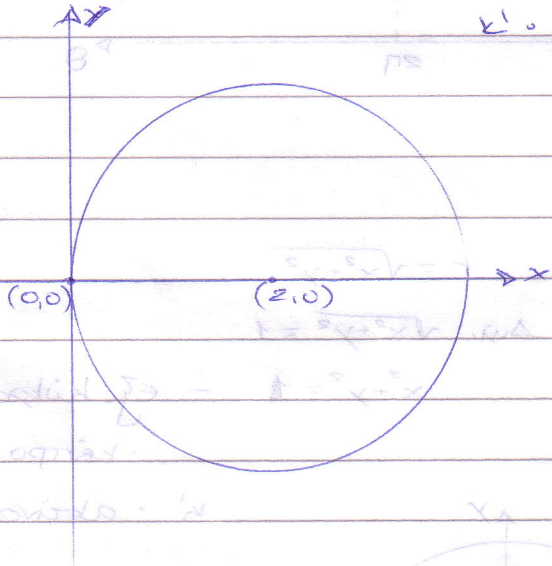
Άρα:

$$x^2+y^2 = 4 \cdot x$$

$$\Rightarrow (x^2-4x+4)+y^2 = 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+y^2 = 2^2$$ — εξ. κύκλου με:

- κέντρο το $K(2,0)$
- κ' ακτίνα την $\rho=2$



iii) $\Gamma: r = 1 - συνθ$ (1)

η (1) θα μπορούσε να γραφεί:

$$r^2 = r - r \cdot συνθ$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2 = r - r \cdot συνθ$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x \quad (2)$$, αφού: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x = r \cdot συνθ$

(2)

Η μορφή αυτή όμως δεν μας εξυπηρετεί περισσότερο από την (1)

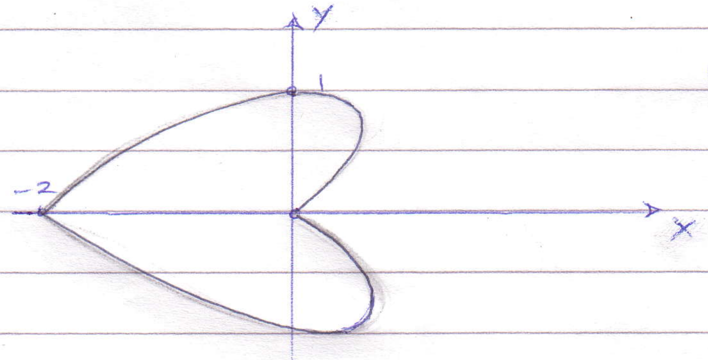
Άπο την (1) παίρνω δοκιμαστικά τιμές για την γωνία θ.

Για $\theta = 0$: $\sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Rightarrow r = 0$ Άρα $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\theta = \pi/2$: $\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow r = 1$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

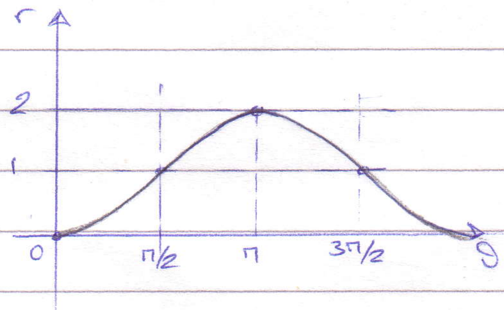
$\theta = \pi$: $\sigma\upsilon\nu\theta = -1 \Rightarrow r = 2$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Άρα στον άξονα x-y η Γ απεικονίζεται :



καρδιοειδές

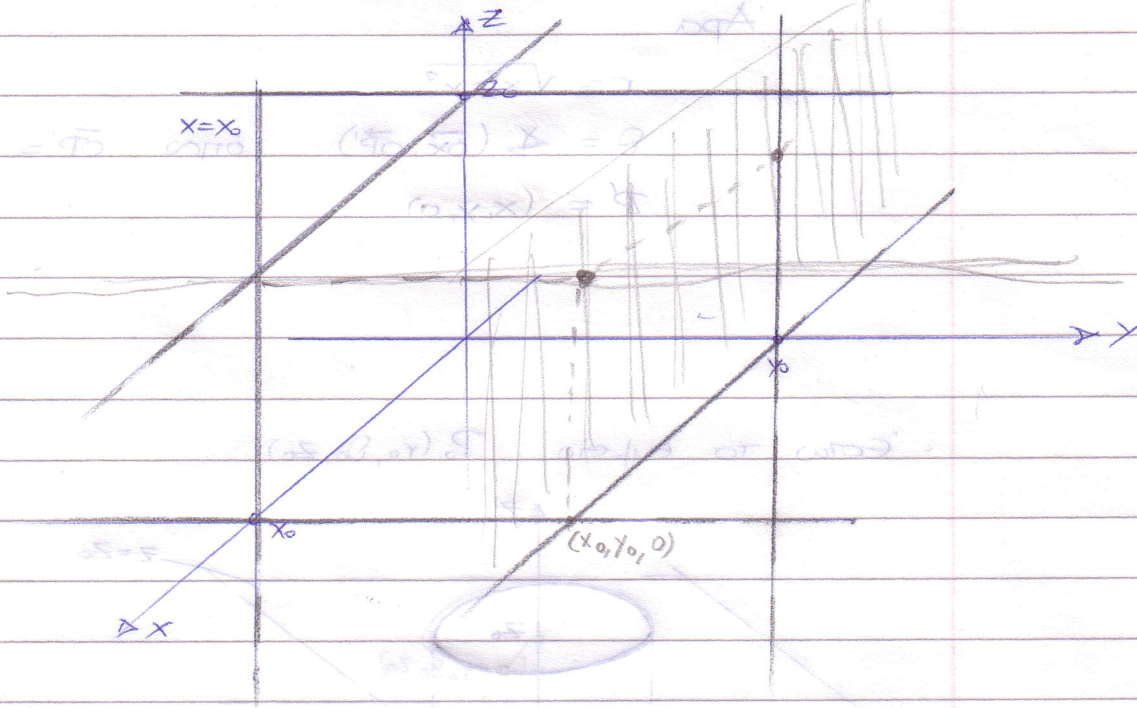
· Στις πολικές συντεταγμένες η απεικόνιση της Γ θα ήταν :



Καρτεσιανές Κυλινδρικές Σφαιρικές Συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες

(x_0, y_0, z_0)



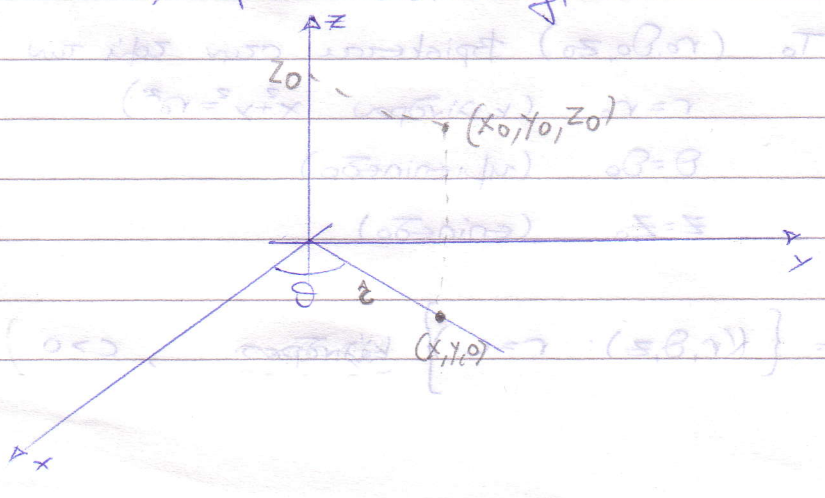
Το σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι η τομή των επιπέδων:

$x=x_0$

$y=y_0$

$z=z_0$

- Κυλινδρικές Συντεταγμένες



Ισχύει $x = r \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

$y = r \cdot \eta\mu\theta$

$z = z$

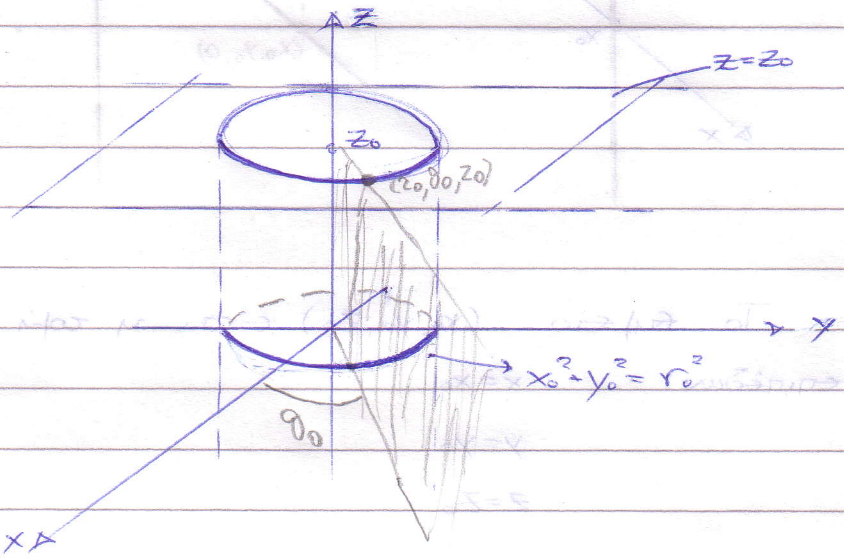
όπου (r,θ) πολικές συντεταγμένες του $(x,y,0)$

Άρα

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \measuredangle(\vec{Ox}, \vec{OP'})$ όπου $P' = (x,y,0)$

· Έστω το σημείο : $P\ (r_0, \theta_0, z_0)$



Το (r_0,θ_0,z_0) βρίσκεται στην τομή των :

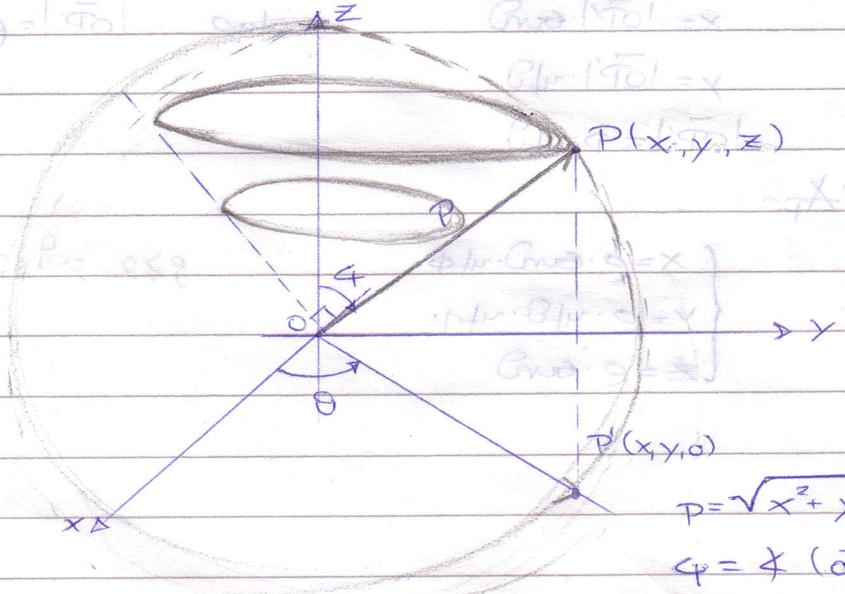
$r = r_0$ (κυλίνδρου $x^2+y^2=r_0^2$)

$\theta = \theta_0$ (ημιεπίπεδο)

$z = z_0$ (επίπεδο)

($S = \{ (r,\theta,z) : r = c \}$ κύλινδρος , $c>0$)

Σφαιρικές Συντεταγμένες



$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$

$\varphi = \measuredangle(\vec{OZ}, \vec{OP})$, $\varphi \in [0, \pi]$

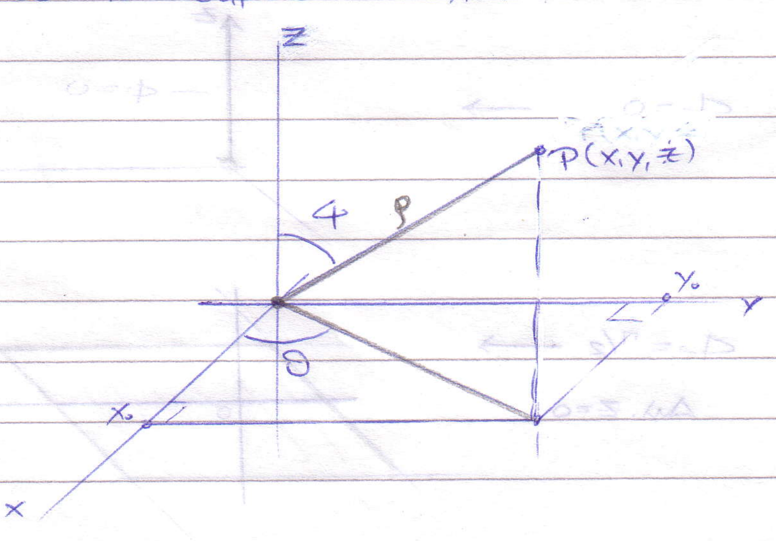
$\theta = \measuredangle(\vec{OX}, \vec{OP'})$, $\theta \in [0, 2\pi]$

όπου $\vec{P'} = (x, y, 0)$

Το $P(p, \varphi, \theta)$ βρίσκεται στην τομή των:

- σφαίρας κέντρου $\vec{O}$ και ακτίνας p
- κώνου γωνίας φ
- Ημιεπιπέδου

έστω το σημείο $P(x, y, z)$



(ρ, θ, ϕ)

$z = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

$x = |\vec{OP'}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ όπου $|\vec{OP'}| = \rho \cdot \eta\mu\phi$

$y = |\vec{OP'}| \cdot \eta\mu\theta$

Άρα:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu\phi \\ y = \rho \cdot \eta\mu\theta \cdot \eta\mu\phi \\ z = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

$\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$

Παραδείγματα

i) $S: \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες)

Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας S σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Αφού:

$x^2 = \rho^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta \; \eta\mu^2\phi$

$y^2 = \rho^2 \cdot \eta\mu^2\theta \cdot \eta\mu^2\phi$

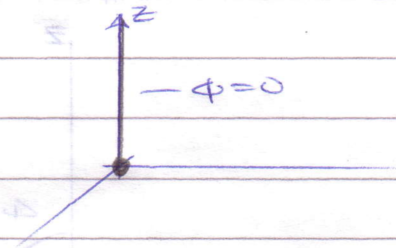
Άρα

$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot \eta\mu^2\phi \cdot 1$

Ισχύει: $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \cdot \eta\mu^2\phi_0 \\ z^2 &= \rho^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\phi_0 \end{aligned}\right\}$ $\frac{x^2+y^2}{z^2} = \cancel{\varepsilon\varphi^2(\phi_0)} \to 1$

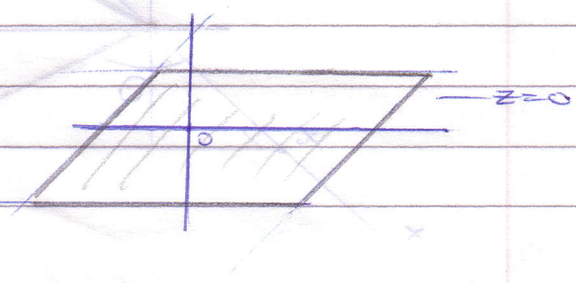
$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$ — κώνος

ii) $\phi = 0 \longrightarrow$



$\phi = \pi/2 \longrightarrow$

Δηλ. $z = 0$



Συναρτήσεις: Όρια, Συνέχεια

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ και $A \neq \emptyset$

$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του A $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0, \ (S(\vec{x}_0, \varepsilon) - \{\vec{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$

↳ Σύνολο σημείων συσσώρευσης του A

Συμβολισμός: A'

∘ Εάν $\vec{x}_0 \in A$ και $\vec{x}_0 \notin A'$

Τότε το $\vec{x}_0$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του A

• Συναρτήσεις μεταξύ Ευκλείδιων χώρων

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^m$

$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$\vec{f_i}$: i-συντεταγμένη της f (Γενική μορφή)

i) Για: ∘ $n = 1$, $m = 1$ $\quad f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

Πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής

π.χ.

→ $a_k x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = P(x)$ (πολυωνυμικές)

→ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (ρητές)

→ Τριγωνομετρικές, Αντίστροφες αυτών (ημx, …, τοξημx, …)

→ Εκθετικές, Λογαριθμικές κτλ (e^x, $\ln x$, a^x, $\log_a x$ …)

→ Ρίζες συναρτήσεων (των παραπάνω)

π.χ.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \eta\mu(\lambda^n x)$, $x \in [0,1]$, $\lambda > 1$, $1 < s < 2$

(Τύπου) Weierstrass / Συνεχείς & Πουθενά παραγωγίσιμες)

(Συναρτήσεις ως όριο συναρτήσεων)

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$ (γάμμα συνάρτηση)

(Συναρτήσεις ως ολοκληρώματα συναρτήσεων)

---

ii) Για : $n \geq 2$, $m = 1$ $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών</u>

π.χ.

$T(x,y,z)$ = Θερμοκρασία , $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\Delta(x_1, \dots, x_n)$ = Δείκτης στο Χρηματιστήριο (x_1, x_n τιμές μετοχών)

$B(x_1, \dots, x_{40})$ = Βαθμός πτυχίου (x_1, x_{40} βαθμοί στα μαθ. 1, 2, ...

---

iii) Για : $n = 1$, $m \geq 2$ $\bar{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

με $\bar{f}: A(\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

<u>Διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής</u>

π.χ.

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ Διάνυσμα θέσης συναρτήσει του t

---

iv) Για : $n \geq 2$, $m \geq 2$ $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m)$

με $\bar{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

<u>Διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών</u>

π.χ.

- $\bar{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ $\Big\}$ $A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$
- Πεδίο Δυνάμεων / $\vec{v}(x,y,z)$ = πεδίο Ταχυτήτων
- $\vec{v}(x,y,z,t)$ = Ταχύτητα σε ρευστό τη χρον. στιγμή t στο σημείο (x,y,z)