Όρια, Συνέχεια, Συναρτήσεις

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A'$ ($\forall \varepsilon > 0$ $(S(\vec{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\vec{x_0}\}) \cap A \neq \emptyset$)

$\vec{f} : A \to \mathbb{R}^m$

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \overset{}{\underset{\text{ορισ}}{\iff}} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, \vec{x_0}) > 0$: αν $\vec{x} \in A$ με $0 < |\vec{x} - \vec{x_0}| < \delta$ τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$

Σημείωση: $n = m = 1$ έχουμε τον γενικό ορισμό $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ (ΓΝΩΣ
($\|\cdot\| = |\cdot|$ στον $\mathbb{R}$)

• $\vec{x_0} \in A$, $\vec{x_0} \notin A'$

ορίζουμε $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x_0})$

$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $\vec{x_0} \in A$ η $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x_0} \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x_0})$

Ισχύει το εξής: (1) $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $\vec{x_0} \in A'$ (ή $\vec{x_0} \in A \setminus A'$), $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f_i(\vec{x_0}) = \vec{b_i}$ $i = 1, 2,$

(2) $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\vec{x} \in A$

$\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x_0} \iff f_1, f_2, \dots, f_m$ είναι συνεχείς στο $\vec{x_0}$

Σημείωση: Για να βρούμε το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης αρκεί να βρούμε το όριο των συντεταγμένων συναρτήσεων.

Ισχύουν οι ανάλογες ιδιότητες των ορίων (συνέχειας) ως αυτές των πρ. συναρτήσεων μιας μεταβλητής εφ' όσον ορίζονται (+, ·, σύνθεση, κριτήριο παρεμβολής, και διαίρεση αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κα

Προσοχή!

Δεν ορίζεται το
$\to \vec{\infty}$

(I) Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου

Αν $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ έχει διαφορετικά όρια κατά μήκος δύο (διαν) διαδρομών καθώς $(x,y) \to (x_0, y_0)$ τότε **ΔΕΝ** υπάρχει το όριο $f(x,y)$ καθώς $(x,y) \to (x_0, y_0)$

(II) Κριτήριο Ασυνέχειας

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in A$

Εάν για κάποια διαδρομή το όριο της f καθώς το $(x,y) \to (x_0, y_0)$ **ΔΕΝ** είναι το $f(\vec{x_0})$ τότε η f είναι **ΑΣΥΝΕΧΗΣ** στο (x_0, y_0)

Ασκήσεις

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x - xy + 3) = 3 \\ &\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2 y + 5xy - y^3) = -1 \ (\neq 0) \end{aligned}\right\} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3} = -3$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$$

***

3) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) ΔΕΝ υπαρχει το $\lim_{(0,0)} f(x,y)$

(ii) ΔΕΝ ειναι συνεχης στο $(0,0)$ και δεν μπορει να γινει συνεχης στο $(0,0)$.

Λυση

Οι συναρτησεις αυτου του τυπου ονομαζονται ευθειογενεις

(1) Διαδρομη $y = \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$f(x,y) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

Διαφορετικό για διαφορα λ (π.χ. $\lambda = 1$, $\lambda = 2$)

Αρα δεν υπαρχει το οριο στο $(0,0)$

ii) Επομενως δεν γινεται συνεχης στο $(0,0)$

***

4 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$y = \lambda x^2$

$f(x,\lambda x^2) = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ Διαφ. για διαφορετικά $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists$ lim στο $(0,0)$

ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ (Μηδενική × Φραγμένη = Μηδενική)

5 **

$f, g : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $\quad \vec{x_0} \in A'$

Έστω ότι $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = 0$ και $|g(\vec{x})| \leq M$, $\vec{x} \in A$

(για κάποιο $M > 0$)

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = 0$

Ασκήσεις

6 * $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \eta\mu \frac{1}{y} = 0$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

και $|\eta\mu \frac{1}{y}| \leq 1$, $y \neq 0$

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} x\cdot y = 0$

διότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot y = 0$

$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$

8. $\lim_{(x,y)\to 0} y \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0$

$\left(\left|\frac{2ab}{a^2+b^2}\right| \leq 1 \right)$

---

9. $\lim_{(0,0,0)} \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

$\left|\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2+z^2} + \frac{|z|^3}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} + \frac{|z|^3}{z^2} =$

$= |y| + |z|$

$\lim_{(0,0,0)} (|y|+|z|) = 0$

Άρα $\lim_{(0,0,0)} \left|\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = 0$

$\Rightarrow \lim_{(0,0,0)} \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$

2^{os} τρόπος

$$|x|, |y|, |z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|$$

$$\left|\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{x^2y+z^2}{\|(x,y,z)\|^2} \le \frac{\|(x,y,z)\|^3+\|(x,y,z)\|^3}{\|(x,y,z)\|^2} =$$

$$= 2\|(x,y,z)\| \to 0$$

10 $\cancel{f(x,y)} = \lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3+x^2y}{x^2+y^2}$

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} + \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le$$

$$|x| + |y| + |y| \to 0$$

11 $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{xy}-1}{x\cdot y}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{F}(x,y)$$

$$\vec{F} = (f, g, h)$$

$\cdot\ f(x,y) = \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\left|\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x|\cdot|y|}{|x|} = |y| \to 0$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

- $g(x,y) = \dfrac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Θέτουμε $z = x^2 + y^2$

$(x,y) \to (0,0) \iff z \to 0$

$$\lim_{(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\eta\mu z}{z} = 1$$

$$\lim_{(0,0)} g(x,y) = 1$$

- $h(x,y) = \dfrac{e^{x\cdot y} - 1}{x \cdot y}$

$W = x \cdot y \qquad (x,y) \to (0,0) \iff W \to 0$

$$\lim_{(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x\cdot y} = \lim_{W\to 0} \frac{e^{W}-1}{W} = 1$$

Άρα $\lim_{(0,0)} h(x,y) = 1$

Άρα $\lim_{(0,0,0)} \vec{F}(x,y) = (0,1,1)$