11-3-09

8ο ΜΑΘΗΜΑ

Παραγώγιση, Μερική Παραγώγιση, Διαφορικό

(1) Παραγώγιση διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής

$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ I: διάστημα του $\mathbb{R}$ $(n \geq 2)$

$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$, $r_i : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

Για $n = 3$ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Το $\vec{r}(t)$ (συνήθως) δίνει το διάνυσμα θέσης ενός κινητού τη χρονική στιγμή t

(Οι συναρτήσεις $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ θα χρειαστούν για την εύρεση μήκους καμπύλης, μάζας σύρματος, υπολογισμό έργου κ.α)

Σημείωση: $\vec{r}(I)$ καλείται και ίχνος της $\vec{r}$

Ορισμός

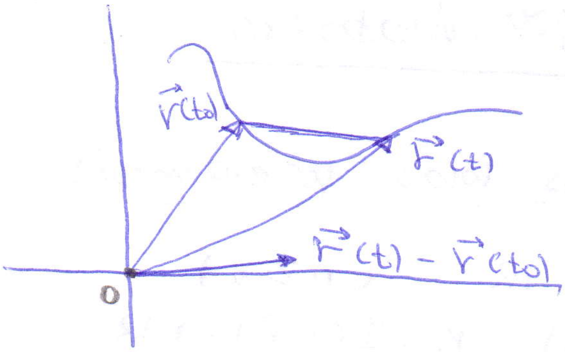
$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ $t_0 \in I$. Εάν $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)$

αυτό καλείται παράγωγος της $\vec{r}$ στο t_0

Στην Φυσική $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{v}(t_0)$ καλείται ταχύτητα (διάνυσμα της ταχύτητας)

Εάν $\exists$ $\vec{r}\,'(t)$ $\forall t \in I$ και $\exists$ $(\vec{r}\,')'(t_0)$ καλείται

επιτάχυνση $\vec{a} = (\vec{r}\,')' = \vec{r}\,''$



Εφαπτομένη ευθείας της $\Gamma : \{\vec{r}(t), t\in I\}$ στο σημείο $\vec{r}(t_0)$

$$\vec{\varphi}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ισχύουν τα εξής

(1) $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ ΤΕΕΙ

(α) $\exists\ \vec{r}\,'(t_0)$ (β) $\exists\ r_1'(t_0), r_2'(t_0), \ldots, r_n'(t_0)$

Τότε $\boxed{\vec{r}\,'(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), \ldots, r_n'(t_0))}$

(2) Εάν $\exists\ \vec{r}\,'(t_0) \Longrightarrow$ η $\vec{r}$ είναι συνεχής στο t_0

$\not\Longleftarrow$ $\vec{r}(t) = (|t|, 1)$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{r}$: συνεχής <u>όχι</u> παραγωγίσιμη στο $t_0 = 0$

(3) Ισχύουν $(\vec{r_1} + \vec{r_2})' = \vec{r_1}\,' + \vec{r_2}\,'$

$$(\lambda \vec{r})' = \lambda \cdot \vec{r}\,'$$

$$(\vec{r_1} \cdot \vec{r_2})' = \vec{r_1}\,' \cdot \vec{r_2} + \vec{r_1} \cdot \vec{r_2}\,'$$

$n=3$: $(\vec{r_1} \times \vec{r_2})' = \vec{r_1}\,' \times \vec{r_2} + \vec{r_1} \times \vec{r_2}\,'$

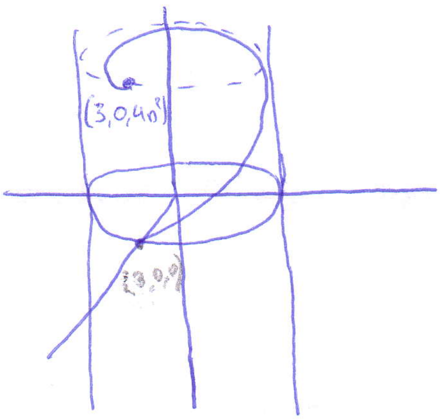
Ασκήσεις

(1) Άτομο επιβαίνει σε τριγωνικό αετό και διαγράφει σπειροειδή τροχιά $\vec{r}(t) = (3\,\text{συν}\,t)\vec{i} + (3\,\text{ημ}\,t)\vec{j} + t^2\vec{k}$
$t \in [0, 2\pi]$

Να υπολογισθούν: (i) $\vec{v}$, $\vec{a}$, (ii) $\|\vec{v}\|$ και

(iii) οι χρονικές στιγμές που $\vec{v} \perp \vec{a}$

Λύση



(i) $\vec{v}(t) = (-3\,\text{ημ}\,t,\ 3\,\text{συν}\,t,\ 2t)$

$\vec{a}(t) = (-3\,\text{συν}\,t,\ -3\,\text{ημ}\,t,\ 2)$

(ii) $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(-3\,\text{ημ}\,t)^2 + (3\,\text{συν}\,t)^2 + (2t)^2}$

$= \sqrt{9 + 4t^2}$, $t \in [0, 2\pi]$

(iii) $\vec{v} \perp \vec{a} \iff \vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \iff$

$\iff 9\,\text{ημ}\,t\,\text{συν}\,t - 9\,\text{ημ}\,t\,\text{συν}\,t + 4t = 0 \iff \boxed{t = 0}$

(2) $\Gamma : \vec{r}(t) = (\text{συν}\,t,\ \text{ημ}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$ του $\mathbb{R}^2$

(i) Δρόμος (Ίχνος)

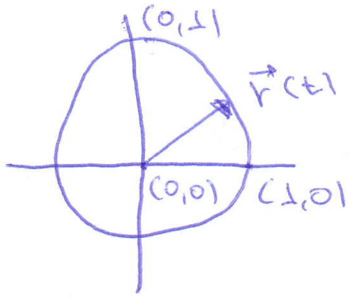
(ii) $\vec{v}$, εφαπτομένη ευθεία

(iii) Τι παρατηρείτε ότι συμβαίνει για $\vec{r}$, $\vec{v}$;

(54)

Λύση

(i) $x(t) = \sigma\upsilon\nu t$ | $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$
$y(t) = \eta\mu t$



(ii) $\vec{V}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Εφ. ευθεία:

$\vec{\varepsilon}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0) =$

$= (\sigma\upsilon\nu t_0 + \lambda \eta\mu t_0, \eta\mu t_0 + \lambda \sigma\upsilon\nu t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|\vec{r}(t)\| = 1$, $t \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t) \cdot (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t) = -\eta\mu t\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t = 0$

$\vec{r} \perp \vec{r}\,' = \vec{V}$

<u>Ερώτημα</u> Εαν $\|\vec{r}(t)\| = c$ $(c > 0)$ $t \in I$

Εχουμε πάντοτε $\vec{r} \perp \vec{r}\,'$; ($\|\vec{r}\| = c \Leftrightarrow$ κινειται σε $\hat{\sigma S}(0, c)$)

(3)** $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ παραγωγισιμη $T \in I$

(i) $\|\vec{r}(t)\| = c$ $(c > 0)$ $\Longleftrightarrow$ (ii) $\vec{r} \perp \vec{V}(t)$, $t \in I$

<u>Λυση</u>

$\|\vec{r}(t)\| = c \Leftrightarrow \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2 \Longleftrightarrow \vec{r}(t) \bullet \vec{r}(t) = c^2$ $t \in I$

$\Longleftrightarrow (\vec{r} \cdot \vec{r})'(t) = 0$, $t \in I$

$\Longleftrightarrow \vec{r}\,' \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}\,' = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{r}\,' = \vec{V}$

Παρατήρηση

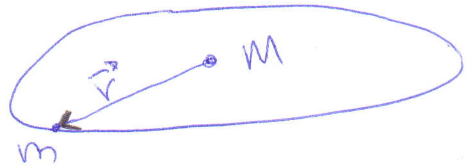
$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ $\quad(-\infty\le\alpha<\beta\le+\infty)$

$f'(x)=0 \quad \forall\, x\in(\alpha,\beta) \xRightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}} f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)=0$
$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$.

Άρα $f(x)=c \Rightarrow f'=0$ (το αντίστροφο δεν ισχύει)
αν το Π.Ο. δεν είναι διάστημα

(4) $M=$ μάζα του ηλίου στο $(0,0,0)$
$m=$ μάζα ενός πλανήτη με διάνυσμα θέσης
$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \quad (\neq(0,0,0))$

$$\vec{F}(\vec{r})=-\frac{G\cdot M\cdot m}{\|\vec{r}\|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \quad / \quad \vec{F}(\vec{r})=m\vec{a} \text{ (Νόμος Newton)}$$



Να αποδείξετε ότι ο πλανήτης κινείται σε σταθερό επίπεδο που περνά από τον ήλιο.

Λύση

Ισχύει $\vec{r}''=\left(-\frac{GM}{\|\vec{r}\|^3}\right)\vec{r}$

$\vec{r}''(t)=\lambda(t)\cdot\vec{r}(t) \Rightarrow$

$\vec{r}''\times\vec{r}=\vec{0}$

Έχουμε $(\vec{r}\times\vec{r}')'=\vec{r}'\times\vec{r}'+\vec{r}\times\vec{r}''=\vec{0}$

Άρα $\vec{r}\times\vec{r}'=\vec{c} \longrightarrow \vec{c}\perp\vec{r},\ \vec{c}\perp\vec{r}'$
($\vec{c}=$ εξωτερικό γινόμενο)

(2) Μερική Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad (n \geq 1)$

$\vec{p} \in A$ (ανοικτό)

Ορίζουμε ως $\dfrac{\partial f(\vec{p})}{\partial x_i} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\vec{p} + h\vec{e}_i) - f(\vec{p})}{h}$ (Εάν $\exists$)

συμβολίζουμε και f_{x_i}

$$\frac{\partial f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1 + h, p_2, \dots, p_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n)}{h} \quad \text{κοκ}$$

Δηλαδή αν πάρουμε τον περιορισμό της f στην ευθεία

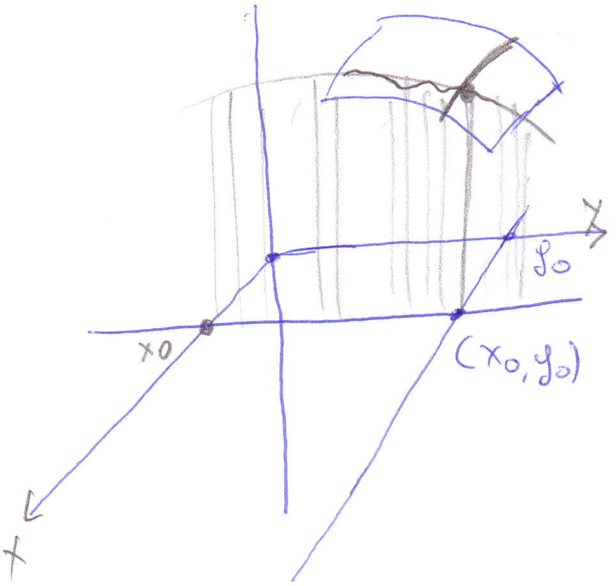
$\{ \vec{p} + t\vec{e}_1, \ t \in \mathbb{R} \}$

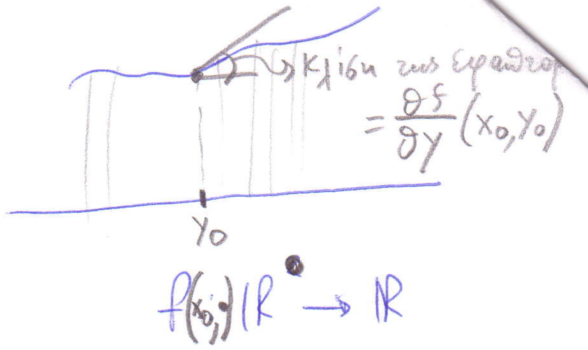
$g_1(x) = f(x, p_2, \dots, p_n)$, $g_1'(p_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ κ.ο.κ.

για $n = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$





ΣΧΗΜΑΤΑ

(Β1. Η1. Τάξη → Έγγραφα → Β) Εργασία: Ναβίτ Κωνσταντίνου)