Ανάλυση ΙΙ / 9ο ΜΑΘΗΜΑ

Μερική Παράγωγος

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in A$ (= ανοικτό)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Μερική παράγωγος της f ως προς x στο (x_0, y_0)

Ανάλογα ορίζεται η $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

- Γενικά $g: B(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in B$, $\frac{\partial g(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{g(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - g(\vec{x}_0)}{h}$

  $i = 1, 2, \dots, n$

Για $n=1$ $g: B \to \mathbb{R}$; $x_0 \in B$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = g'(x_0)$

Ασκήσεις

1) Να βρεθούν οι f_x, f_y στο $(4,-5)$ της $f(x,y) = x^2 + 3xy + y$

$y_0 = -5$ / $f(x,-5) = x^2 + 3x(-5) + (-5) - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2x + 3(-5)\Big|_{x=4} = -7$$

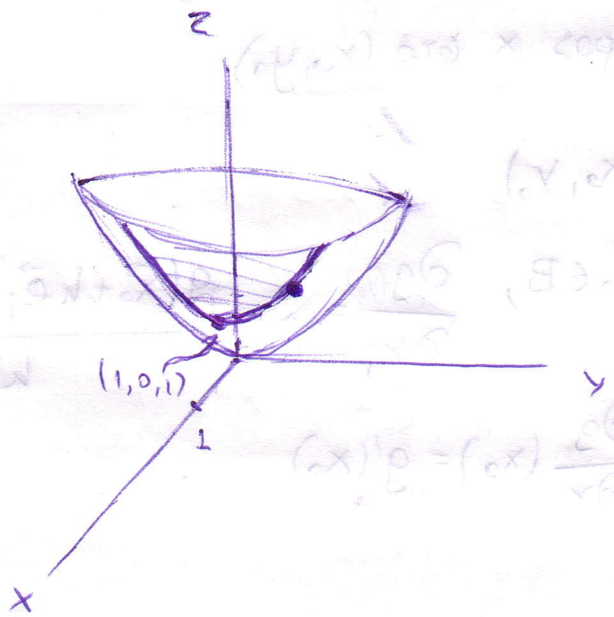
$x_0 = 4$ / $f(4,y) = 4^2 + 3 \cdot 4(y) + y - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 13$$

2) f_y σε τυχαίο σημείο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=y\,\eta\mu(xy)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \eta\mu(xy) + y(x\,\sigma\upsilon\nu(xy)).$$

3) Το επίπεδο $x=1$ τέμνει το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ σε μια καμπύλη. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης στο $(1,2,5)$.



Η ζητούμενη κλίση είναι η $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2y\Big|_{y=2} = 4$$

4) Αν οι αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 συνδεθούν παράλληλα, η συνολική αντίσταση R είναι

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ζητείται η $\frac{\partial R}{\partial R_2}$, $R_1=30$, $R_2=45$, $R_3=90$ (ohm)

$$R = \frac{1}{R_1^{-1}+R_2^{-1}+R_3^{-1}} \quad . \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^{-2}}{(R_1^{-1}+R_2^{-1}+R_3^{-1}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2}(30,45,90) = \frac{(1/45)^2}{\left(1/30+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}\right)^2} = 1/9$$

Μερικές Παράγωγοι και Συνέχεια

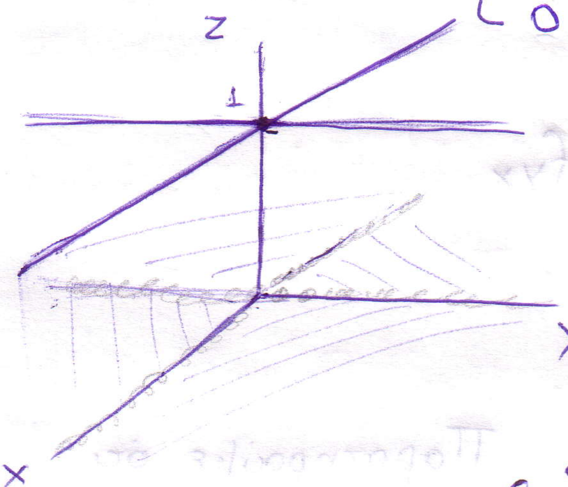
i) Εάν η f είναι συνεχής $\overset{?}{\Longrightarrow} \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \ (i=1,2\ldots n)$

Όχι πχ $f(x,y)=|x|+|y|$, συνεχής, αλλά

$\nexists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$

ii) Εάν $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \overset{?}{\Longrightarrow}$ η f συνεχής.

Όχι πχ$_1$ $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x=0 \text{ ή } y=0 \\ 0, & x\neq 0 \text{ και } y\neq 0 \end{cases}$



$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Ασυνεχής στο $(0,0)$

πχ$_2$ $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ / Ασυνεχής στο $(0,0)$.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$. Έστω ότι $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \ \forall \vec{x}\in A$.

$g=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: A\to\mathbb{R}$

Εάν $\exists \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_0\in A$, αυτή λέγεται μερική παράγωγος 2^{ης} τάξης ως προς i, j

Συμβ. $f_{x_j x_i}$ ή $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$

Αν $i=j$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Ανάλογα $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ κ.ο.κ.

Άσκηση

$f(x,y) = x\,\text{συν}\, y + y e^x$

Να βρεθούν οι $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$

Τι παρατηρείτε;

$f_x(x,y) = \text{συν}\, y + y e^x$

- $f_{xx}(x,y) = y e^x$
- $f_{xy}(x,y) = -\text{ημ}\, y + e^x$
- $f_y(x,y) = -x\,\text{ημ}\, y + e^x$
- $f_{yy}(x,y) = -x\,\text{συν}\, y$
- $f_{yx}(x,y) = -\text{ημ}\, y + e^x$

Παρατηρούμε ότι

$f_{xy}(x,y) = -\text{ημ}\, y + e^x$

$= f_{yx}(x,y)$

$(x,y) \in \mathbb{R}$

Ερώτημα: Ισχύει πάντα ότι $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

Όχι πχ $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2y^2 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^4x + 4x^2y^2 - x^5}{(y^2+x^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

• <u>Θεώρημα</u> (Schwarz)

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in A$

Εάν $\exists$ f_x, f_y, f_{xy} και είναι συνεχείς στο A, τότε

$\exists$ $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

- <u>Ειδική περίπτωση</u>

<u>Θεώρημα</u> <u>Clairaut</u>

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ και $\exists$ f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} <u>συνεχείς</u>

τότε $f_{xy} = f_{yx}$.

• Ορισμός: $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, <u>$C^1$</u> τάξης $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ μερ. παρ. και είναι συνεχείς.

Εάν $\exists$ $2^{ης}$ τάξης μερ. παρ. και είναι συνεχείς η f είναι <u>C^2</u> συνάρτηση κ.ο.κ

Εάν $\exists$ οι μερ. παρ. <u>κάθε</u> τάξης τότε η f είναι <u>C^∞</u> συνάρτηση

Διαφόριση, Γραμμικοποίηση συνάρτηση. Διαφορικό.

Χρειαζόμαστε (κάποια) Θεωρία των Γραμ. απεικονίσεων.

Ορισμός: Θεωρούμε $\vec{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$

Η $\vec{u}$ είναι γρ. συνάρτηση $\Leftrightarrow$

i) $\vec{u}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y})$

ii) $\vec{u}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{u}(\vec{x})$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda\vec{u}(\vec{x}) + \mu\vec{u}(\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Σημείωση: $\vec{u}$ = γραμμική συν $\Rightarrow \vec{u}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Ισχύει ότι:

$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{u}$ = γραμ. συναρ $\Leftrightarrow$ $u_1, u_2, \dots u_m$ $(: \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ γραμ. συναρτήσεις

- Μορφή Γρ. Συν $\vec{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1) $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Γραμμική $\Leftrightarrow$ $\exists \vec{a} \in \mathbb{R}^n : u(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$, $x \in \mathbb{R}^n$

($\Leftarrow$) Προφανώς

($\Rightarrow$) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$

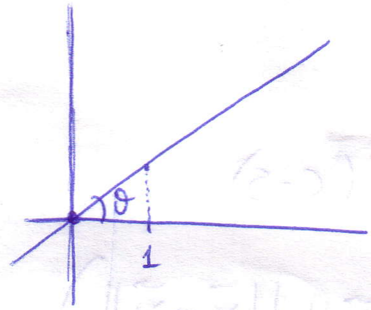
$u(\vec{x}) = x_1 u(\vec{e}_1) + \dots + x_n u(\vec{e}_n)$

Άρα για $\vec{a} = (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ έχουμε ότι

$u(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$.

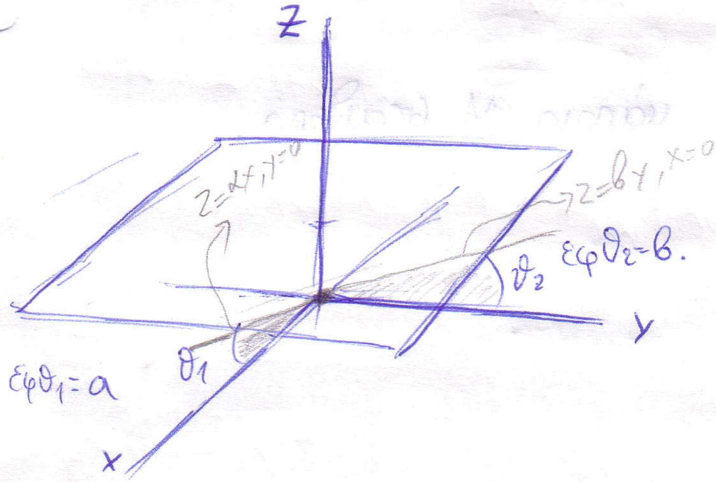
Παραδείγματα

1) $n=1$, $u(x)=ax$, $x\in\mathbb{R}$ οι γρ. συναρ. $(u:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$



$u(1)=a=$ κλίση της $y=ax=$ εφθ.

$n=2$, $u(x,y)=(a,b)\cdot(x,y)=ax+by$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$



$a=u(1,0)=$ κλίση ευθ: $\left.\begin{array}{l} z=ax \\ y=0 \end{array}\right\}$

$b=u(0,1)=$ κλίση ευθ: $\left.\begin{array}{l} z=by \\ x=0 \end{array}\right\}$.

2) $\vec{u}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ γραμ $\Leftrightarrow$ $\exists$ πίνακας A ώστε

$$\vec{u}(\vec{x})=A\vec{x}^{\,T} \quad , \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

($\Leftarrow$) προφανώς

($\Rightarrow$) $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,\dots u_m)$

$u_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ γραμ. $\Rightarrow \exists\, \vec{a}_i\in\mathbb{R}^n: u_i(\vec{x})=\vec{a}_i\cdot\vec{x}$

$$\vec{u}(x_1,x_2\dots x_n)=\begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1)x_1+u_2(\vec{e}_2)x_2+\dots+u_1(\vec{e}_n)x_n, \\ \dots, u_m(\vec{e}_1)x_1+\dots+u_m(\vec{e}_n)x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1) & u_1(\vec{e}_2) \dots & u_1(\vec{e}_n) \\ \vdots & & \\ u_m(\vec{e}_1) & u_m(\vec{e}_2) \dots & u_m(\vec{e}_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=Ax^T$$

Ισχύει το εξής:

i) u = γραμμ. συνάρτηση, $u(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$
$(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$

$$|u(\vec{x})| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{x}\| \quad , \vec{x}\in\mathbb{R}^n \ (C\text{-}S)$$

Άρα: u = συνεχής $\left(|u(\vec{x})-u(\vec{y})| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{x}-\vec{y}\|\right)$.

ii) $\vec{u} = (u_1, \dots u_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\|\vec{u}(\vec{x})\| \leq M\|\vec{x}\|$ για κάποιο M σταθερό.

($\Rightarrow \vec{u}$ συνεχής)