① 18/3/09

(66)

Ανάλυση ΙΙ   10ο ΜΑΘΗΜΑ

Γραμμικοποίηση συνάρτησης Διαφορίου, Διαφορικό

Εισαγωγή στην έννοια "Διαφορικό" $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) σημείο στο x_0 $\iff \exists \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)\ (\in\mathbb{R})$

$$\iff \exists\, a\,(=f'(x_0))\in\mathbb{R} : \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$$

$\iff \exists\, U_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση, $(U_{x_0}(h)=ah)$:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-U_{x_0}(h)-f(x_0)}{h} = 0 \iff \exists\, U_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γραμμική

ώστε η
$$\varphi(h) = \begin{cases}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-U_{x_0}(h)}{|h|} & h\neq 0\\ 0 & h=0\end{cases}$$

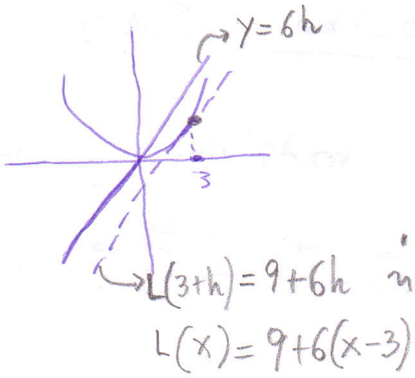
με $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = \varphi(0) = 0$

Την $U_{x_0}\equiv df(x_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γραμμική την αναφέρουμε διαφορικό της f στο x_0.

Π.χ. $f(x)=x^2$, $df(3)$

$f'(x)=2x$, $f'(3)=6$.

$df(3)(h) = f'(3)h = 6h,\ h\in\mathbb{R}$



Γραμμικοποίηση της f στο x_0

$$L(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)h \quad (h), \quad h \in \mathbb{R}$$

$$L(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

Σημείωση: $\vec{f} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $(n \geq 2)$ **δεν** μπορούμε να ορίσουμε το $\lim\limits_{\vec{h}\to 0} \dfrac{\vec{f}(x_0+\vec{h}) - \vec{f}(x_0)}{\vec{h}}$

Ορισμός: $\vec{f} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x_0} \in A$ (ανοικτό). Εάν $\exists$ $\vec{U}_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική συνάρτηση ώστε $\lim\limits_{\vec{h}\to 0} \dfrac{\vec{f}(x_0+\vec{h}) - \vec{f}(x_0) - \vec{U}_{x_0}(\vec{h})}{\vec{h}}$ τότε λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$

Ισοδύναμα: Εάν $\exists$ $\vec{U}_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική ώστε η

$$\vec{\phi}(\vec{h}) = \begin{cases} \dfrac{\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x_0}) - \vec{U}_{x_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} & \vec{h} \neq 0 \\ \vec{0} & \vec{h} = 0 \end{cases} \qquad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \vec{\phi}(\vec{h}) = \vec{0}$$

Ισχύουν τα εξής:

(1) Η γρ. συνάρτηση $\vec{U}_{\vec{x_0}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (αν υπάρχει) είναι μοναδική. Συμβολίζεται $d\vec{f}(\vec{x_0})$ ή $D\vec{f}(\vec{x_0})$ ή $D_1\vec{f}(\vec{x_0})$ και καλείται διαφορικό της $\vec{f}$ στο $\vec{x_0}$

$$\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + d\vec{f}(\vec{x_0})(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\vec{q}(\vec{h})$$

(2) $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x_0} \in A$ τεε

(i) $\exists\ d\vec{f}(\vec{x_0})$, (ii) $\exists\ df_1(\vec{x_0}), \ldots, df_n(\vec{x_0})$

Τότε $d\vec{f}(\vec{x_0}) = (df_1(\vec{x_0}), \ldots, df_n(\vec{x_0}))$

Ιδιότητες

(1) $\vec{f}, \vec{g} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ εαν $\exists\ d\vec{f}(\vec{x_0}), d\vec{g}(\vec{x_0})$ τότε

$\exists\ d(\vec{f}+\vec{g})(\vec{x_0}) = d\vec{f}(\vec{x_0}) + d\vec{g}(\vec{x_0})$

(2) Εαν $\exists\ d\vec{f}(\vec{x_0}) \Rightarrow \exists\ d(\lambda\vec{f})(\vec{x_0}) = \lambda d\vec{f}(\vec{x_0})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Γραμμικοποίηση της $\vec{f}$ στο $\vec{x_0}$

$$\vec{L}(\vec{x_0} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + d\vec{f}(\vec{x_0})(\vec{h}) \quad ή$$

$$\vec{L}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + d\vec{f}(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0})$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Εαν $f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \in A$ τότε η f είναι συνεχής στο $\vec{x_0}$

Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη

$f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + df(\vec{x_0})(\vec{h}) + \|\vec{h}\| q(\vec{h})$ με $df(\vec{x_0}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική και $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} q(\vec{h}) = 0$

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| \leq |df(\vec{x_0})(\vec{x}-\vec{x_0})| + \|\vec{x}-\vec{x_0}\| |q(\vec{x}-\vec{x_0})| \leq$$

$$\leq M\|\vec{x}-\vec{x_0}\| + \|\vec{x}-\vec{x_0}\| |q(\vec{x}-\vec{x_0})| \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{x_0}]{} 0$$

Άρα $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0})$ δηλαδή f συνεχής στο $\vec{x_0}$

$\Leftarrow$

Π.χ $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ συνεχής

$\nexists f'(0) \Longrightarrow$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

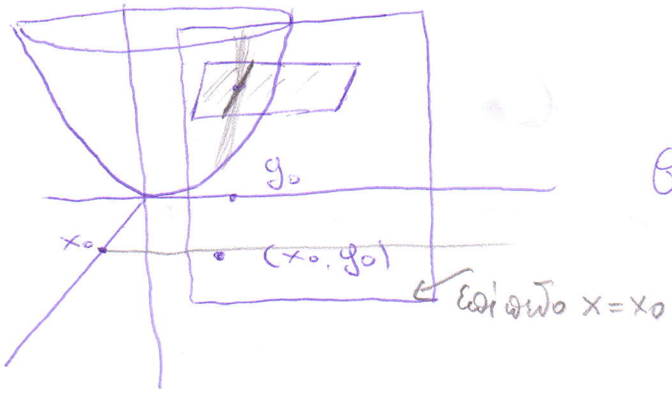
Ερώτημα

$f: (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\gamma, \delta)$

το $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in \mathbb{R}$

δηλαδή η $f'(x_0)$ = κλίση της εφαπτομένης, μας δίνει το διαφορικό (δηλαδή το α της γραμμικής συνάρτησης)

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ στο (x_0, y_0) διαφορίσιμη δηλ $\exists$ $U(h_1, h_2) = a h_1 + b h_2$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί τον ορισμό. Ποιά είναι τα α, β;



$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x_0}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \right)$$

<u>κλίση</u> ή <u>gradient</u> ή <u>ανάδελτα της f στο $\vec{x_0}$</u>

<u>Θεώρημα 2</u>

$f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$. Τότε

(i) $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $df(\vec{x_0})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}$

$$df(\vec{x_0})(h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_1 \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial f(\vec{x_0})}{\partial x_n}$$

<u>Θεώρημα 3</u>

$f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$ ΤΕΕΙ

(i) η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$

(ii) $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\boxed{\text{και}}$ ισχύει $\displaystyle\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x_0} + \vec{h}) - f(\vec{x_0}) - \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

(Από όλα τα προηγούμενα)

Θεώρημα 4

Έστω $f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (C^1 τάξης (στο $\vec{x_0}$))

Όταν $\exists$ μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς στο $\vec{x_0}$ τότε $\exists$ $df(\vec{x_0})$

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ $\boxed{\text{ΔΕΝ}}$ ΙΣΧΥΕΙ (βλέπε άσκηση 7)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\exists$; $df(1,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$

Άρα $\exists$ $df(1,2)(h_1,h_2) = 2h_1 + 4h_2$

$L(x,y) = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$

(2) $f(x,y) = \eta\mu(x\cdot y) + e^x$, $\exists$; $df(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\sigma\upsilon\nu(x\cdot y) + e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\sigma\upsilon\nu(x\cdot y)$$

Συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$

Άρα $\exists$ $df(1,0)(h_1,h_2) = e\,h_1 + h_2$

72.

(3) $f(x,y) = (\ln(x+1),\ y^2,\ \text{τοξεφ}\,x)$ $\exists j\ \cancel{(1,5)}\ (x_0, y_0)$ / $x_0 > -$

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \left(\frac{1}{x_0+1}\cdot h_1,\ 2y_0 h_2,\ \frac{1}{1+x_0^2} h_1\right)$$