

24/3/09

Ανάσων II110 ΜΑΘΗΜΑΑσκήσεις

$$\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{f} \text{ Διαφορίσιμη στο } \vec{x}_0 \Leftrightarrow \text{υπάρχει γραμμική απεικόνιση } \vec{U}_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ π. ω } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{U}_{\vec{x}_0} \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$$(\text{ ή } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{U}_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0)$$

$$\vec{U}_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ διαφορικό της } \vec{f} \text{ στο } \vec{x}_0$$

$$\text{Αν υπάρχει είναι μοναδική } \vec{U}_{\vec{x}_0} = d\vec{f}(\vec{x}_0)$$

Ασκήσεις

(1) Εξετάστε αν η $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ έχει διαφορικό στο $(3,2)$. Να βρεθεί η γραμμικοποίηση της f στο $(3,2)$

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x + y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Είναι συνεχείς άρα η } f \text{ είναι διαφορίσιμη} \\ &\text{σε κάθε σημείο} \\ &\text{Επίσης } \frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 6 - 2 = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1, \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$df(3,2)(h_1, h_2) = (4, -1) \cdot (h_1, h_2) = 4h_1 - h_2$$

$$\hookrightarrow \nabla f(3,2)(h_1, h_2)$$

Άρα η γραμμικοποίηση της f στο $(3,2)$

$$L(x,y) = f(3,2) + df(3,2)(x-3, y-2)$$

$$L(x,y) = (9 - 6 + 2 + 3) + 4(x-3) - (y-2)$$

$$L(x,y) = 8 + 4x - 12 - y + 2$$

$$L(x,y) = 4x - y - 2$$

(2) Όμοια για την $\vec{F}(x,y,z) = (x+e^z, y^2)$, $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 για το $(1,2,0)$

Λύση

Έχουμε $\vec{F} = (F_1, F_2)$

$$F_1(x,y,z) = x + e^z$$

$$F_2(x,y,z) = y^2$$

Οι μερικές παραγώγους είναι: $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) = 1$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 0$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = e^z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = 0 \quad \text{οι οποίες είναι συνεχείς άρα οι}$$

F_1, F_2 έχουν διαφορικό στο $(1,2,0)$ και (από θεωρία) η $\vec{F}$ έχει διαφορικό στο $(1,2,0)$ και

$$d\vec{F}_{(1,2,0)}\vec{u} = (dF_1(1,2,0)\vec{u}, dF_2(1,2,0)\vec{u})$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } dF_1(1,2,0)\vec{u} &= \nabla F_1(1,2,0)\vec{u} = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + e^0 u_3 = \\ &= u_1 + u_3 \end{aligned}$$

$$dF_2(1,2,0)\vec{u} = \nabla F_2(1,2,0)\vec{u} = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot 2 u_2 + 0 \cdot u_3 = 4u_2$$

$$\text{Άρα } d\vec{F}_{(1,2,0)}\vec{u} = (u_1 + u_3, 4u_2)$$

Η γραμμικοποίηση της $\vec{F}$ στο $(1,2,0)$ είναι η συνάρτηση
 on $L(x,y,z) = \vec{F}_{(1,2,0)} + d\vec{F}_{(1,2,0)}(x-1, y-2, z)$

$$L(x,y,z) = (2,4) + (x-1+z, 4(y-2))$$

$$L(x,y,z) = (x+z+1, 4y-4)$$

③ Έστω

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (i) συνέχεια στο $(0,0)$, (ii) ύπαρξη μερικών παραγώγων στο $(0,0)$,
 (iii) διαφορισμότητα στο $(0,0)$

Λύση

(i) Έχουμε δει (για $y = d \cdot x$) ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x,y)$ δεν υπάρχει. Άρα η $F(x,y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

(ii) Έχουμε
$$\frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$. Ομοίως $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

(iii) Αφού υπάρχουν οι $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ η $F(x,y)$ θα

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Περίτρεχ
 το κάνουμε
 αν είναι
 συνεχής.

Αφού $F(x,y)$ ασυνεχής στο $(0,0)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

[4] Όμοια για την συνάρτηση

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

(i) Έχουμε $\left| \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{x \cdot y}{|x|} \right| = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

Αρα $F(x,y)$ συνεχής στο $(0,0)$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$

Όμοια $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$

(iii) Αρα η $F(x,y)$ θα είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Έχουμε

$$\frac{F(x,y) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

• Για $x=y$ έχουμε $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$

Αρα η F δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

5) Check if the function

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

for extremum (i) to determine the local maximum

Also

$$(1) \text{ Example or } |f(x, y)| \leq (x^2 + y^2) \cdot 1 \rightarrow 0 \text{ as } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Also $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Also f is continuous at $(0, 0)$

$$(ii) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \neq 0$$

$$\text{Check } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

(iii) Also univariate derivatives at $(0, 0)$ are $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ at $(0, 0)$

to determine if the function is a local extremum at $(0, 0)$

$$df(0, 0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 = 0$$

Also: $f(x, y)$ is continuous at $(0, 0)$: $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \neq 0$$

Also $f(x, y)$ is not differentiable at $(0, 0)$.

(iv) Για $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} 2x$$

$$= \underbrace{2x \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{h(x)} \xrightarrow{?} 0$$

Έχουμε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ (ψηθενική $\times$ φραγμένη)

Εστω $y=x$

$$\text{Τότε } h(x,x) = \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{2}x} \stackrel{x>0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x,x)$ δεν είναι $0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$

Επιλέγουμε ακολουθία (x_v) , $v \in \mathbb{N}$ z.w

(i) $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = 0$

(ii) $\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x_v} = 1$

(ii) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x_v} = 2\pi v$, $v \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x_v = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi v}$

Τότε $\lim_{v \rightarrow \infty} h(x_v, x_v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Αρα $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x_v, x_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} g(x_v, x_v) - \lim_{v \rightarrow \infty} h(x_v, x_v) =$

$= 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$. Αρα $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ δεν είναι συνεχής στο

$(0,0)$. Όποια για $\sigma\upsilon\nu \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$