31/3/09 — 12ο ΜΑΘΗΜΑ

Ανάλυση ΙΙ

Παράγωγος κατα κατεύθυνση ή κατευθυνόμενη Παράγωγος

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$ (= ανοικτό). Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\| = 1$. Εάν υπάρχει το $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\vec{x_0} + h\vec{a}) - f(\vec{x_0})}{h}$

καλείται <u>παράγωγος κατα κατεύθυνση $\vec{a}$ της f στο $\vec{x_0}$</u>

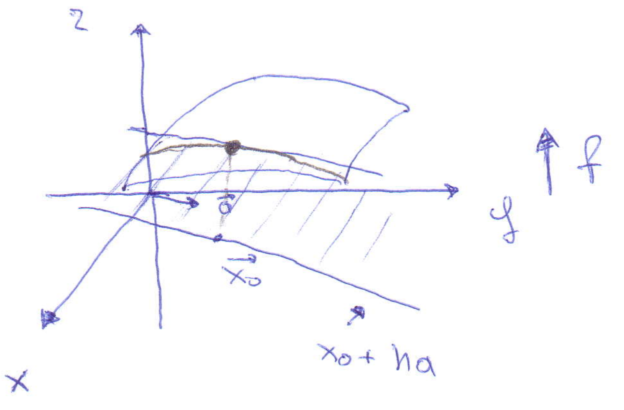
<u>Ισχυει το εξής</u>

Εάν $\exists\ df(\vec{x_0})$ τοτε $\exists\ D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ για $\forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\| = 1$

(Απόδειξη: $\vec{h} = t\vec{a}$ στον ορισμό του διαφορικού)

Τότε ισχυει $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{a} = df(\vec{x_0})(\vec{a})$

<u>Σημειωση</u>: Αν $\vec{a} = \vec{e_i}$ $D_{e_i} f(\vec{x_0}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$



Συνέχεια - Παράγωγος κατα κατευθυνση

- f συνεχής στο $\vec{x_0}$ $\not\Rightarrow$ $\exists\ D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$

π.χ $f(x,y) = |x| + |y|$ $(\vec{a} = \vec{e_1}$ ή $\vec{e_2})$

- $\exists\ D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ $\forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ $\|\vec{a}\| = 1$ $\not\Rightarrow$ f συνεχης στο $\vec{x_0}$

π.χ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ <u>Ασυνεχης</u> στο $(0,0)$ $(y = \lambda x^2)$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$

$D_{(a_1,a_2)} f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(a_1,a_2)) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(ha_1, ha_2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2 a_1^2 \, h a_2}{h^4 a_1^4 \, h^2 a_2^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a_1^2 a_2}{h^2 a_1^4 + a_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2}$ αν $\alpha_2 \neq 0$.

$a_2 = 0$, $D_{(a_1,0)} f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{0}{h^4 a_1^4} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$

Άσκηση

$D_{\vec{a}} f(1,1,1)$, $f(x,y,z) = x \cdot y + e^z$, $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

~~Υπολογίστε~~

Λύση

α τρόπος

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^z$

Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow \exists\, df(1,1,1)$. Τότε $\cancel{D_{\vec{a}}(1,1,1)}$

$D_{\vec{a}} f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \vec{a}$

Άρα $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} f(1,1,1) = (1,1,e) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2}$

β τρόπος

$g(h) = f(\vec{x_0} + h\vec{a})$

$g'(0) = D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$

$g(h) = f\left((1,1,1) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right) = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}h, 1\right) =$

$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\right)^2 + e$

$D_{\vec{a}} f(1,1,1) = g'(0) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h + 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Big|_{h=0} = \sqrt{2}$

Ο ρόλος της κλίσης $\nabla f(\vec{x_0})$ στο ρυθμό μεταβολής

Έστω $f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x_0} \in A$ (= ανοικτό)

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\| = 1$ $\quad \nabla f(\vec{x_0}) \neq \vec{0}$

$$\boxed{D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{a}} = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \, \|\vec{a}\| \, \text{συν}\theta \quad , \theta = \measuredangle(\nabla f(\vec{x_0}), \vec{a})$$

$$D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \, \text{συν}\theta_{(\vec{a})}$$

Η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$ λαμβάνει τη μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \text{συν} \measuredangle(\nabla f(\vec{x_0}), \vec{a}) = 1 \ (-1) \Longleftrightarrow \vec{a} = \frac{\nabla f(\vec{x_0})}{\|\nabla f(\vec{x_0})\|} \qquad \left(\vec{a} = -\frac{\nabla f(\vec{x_0})}{\|\nabla f(\vec{x_0})\|}\right)$$

Άσκηση → S.O.S

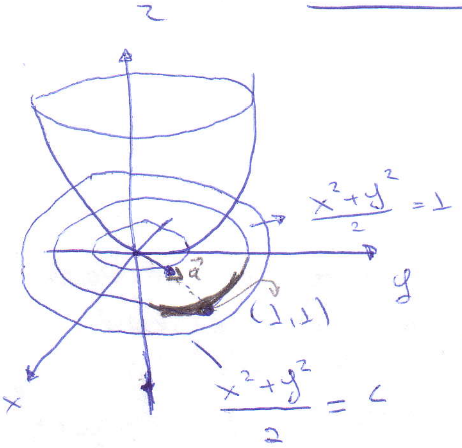
$f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ να βρεθούν οι κατευθύνσεις όπου

η f (i) παρουσιάζει μέγιστη αύξηση στο $(1,1)$.

(ii) = ελάχιστη = = =

(iii) = μηδενική μεταβολή = =

Λύση



(i) Η $D_{(a_1,a_2)} f(1,1)$ γίνεται μέγιστη αν $\vec{a} = \dfrac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}$. $\nabla f(1,1) = (1,1)$, $\|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{}$

$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(ii) ελάχιστη $\vec{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(iii) $\nabla f(1,1) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0$

$a_1^2 + a_2^2 = 1 \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ή $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ

Αλυσιδωτή παραγώγιση, Εφαπτόμενο επίπεδο, Θ: πεπλεγμένων

(I) Αλυσιδωτή Παραγώγιση

$$\begin{tikzcd}
(t_1, t_2, \ldots, t_n) \arrow[r, "\vec{\Phi}"] \arrow[dr, "\vec{f} \circ \vec{\Phi}"'] & (x_1, x_2, \ldots, x_m) \arrow[d, "\vec{f}"] \\
\mathbb{R}^n & \mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}^\ell
\end{tikzcd}$$

$\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_\ell)$

$\vec{f} \circ \vec{\Phi} = (h_1, h_2, \ldots, h_\ell)$

Θεώρημα: (Διαφόριση σύνθεσης συναρτήσεων)

$\vec{\Phi} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \vec{\Phi}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{f} : \vec{\Phi}(A) \to \mathbb{R}^\ell$

Έστω ότι $\exists\, d\vec{\Phi}(\vec{t_0})$ $(\vec{t_0} \in A)$

$\exists\, d\vec{f}(\vec{\Phi}(\vec{t_0}))$

Τότε $\exists\, d(\vec{f} \circ \vec{\Phi})(\vec{t_0}) = d\vec{f}(\vec{\Phi}(\vec{t_0})) \circ d\vec{\Phi}(\vec{t_0})$

Γράφοντας τους αντίστοιχους πίνακες των γραμμικών απεικονίσεων $d(\vec{f}\circ\vec{\varphi})(\vec{t_0})$, $d\vec{f}(\vec{\varphi}(\vec{t_0}))$, $d\vec{\varphi}(\vec{t_0})$ συμπεραίνουμε
Στοιχεία Αλγεβ

όπου

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_\ell}{\partial t_1} & \frac{\partial h_\ell}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_\ell}{\partial t_n} \end{pmatrix}_{(\vec{t_0})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{(\vec{\Phi}(\vec{t_0}))} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial t_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial h_k}{\partial t_\nu}(\vec{t_0}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k(\vec{\phi}(\vec{t_0}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi_i(\vec{t_0})}{\partial t_\nu}}$$

$k = 1, 2, \dots, q$
$m = 1, 2, \dots, n$

Ειδικές Περιπτώσεις

(1) $n = m = 1$

$(f \circ \phi)'(t_0) = f'(\phi(t_0)) \cdot \phi'(t_0)$ (Γνωστό!)

(2) $n = q = 1$, $m = 3$

$$\begin{tikzcd} t, \mathbb{R} \arrow[r, "\vec{r}"] \arrow[dr] & (x,y,z)/\mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Άρα $\dfrac{d(f \circ \vec{r})}{dt}(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z} z'(t_0)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

ή

$$\boxed{\frac{d(f \circ \vec{r})}{dt}(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0)}$$

Γενικά: $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορ.

$$\boxed{\frac{d(f \circ \vec{r})}{dt}(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}\,'(t_0)}$$

(3) $n = m = 2$, $q = 1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \ (u,v) \arrow[r, "\vec{\phi}"] \arrow[dr, "f \circ \vec{\phi}"'] & \mathbb{R}^2 \ (x(u,v), y(u,v)) \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial (f \circ \vec{\phi})}{\partial u \, (v)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u \, (v)} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u \, (v)}$$

Σημείωση: $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / Τελεστής Laplace

$\nabla^2 f = 0$ η f καλείται Αρμονική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να ευρεθεί η παράγωγος της $W = x \cdot y$ ως προς t κατά μήκος της καμπύλης $x = \sigma\upsilon\nu t$, $y = \eta\mu t$ $(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd}
t \in \mathbb{R} \arrow[r, "\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\, \eta\mu t)"] \arrow[dr, "W \circ \vec{r}"'] & (x, y) \arrow[d, "W(x,y) = x \cdot y"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

α τρόπος

$W \circ \vec{r}(t) = \eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t$

$\dfrac{d(W \circ \vec{r})(t)}{dt} = \sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t$

β τρόπος

$$\frac{d(W \circ \vec{r})}{dt}(t) = \frac{\partial W}{\partial x}(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial W(\vec{r}(t))}{\partial y} y'(t) =$$

$$= y\Big|_{y = \eta\mu t} \cdot (-\eta\mu t) + x\Big|_{x = \sigma\upsilon\nu t} \sigma\upsilon\nu t = -\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t$$