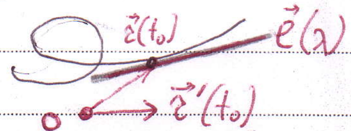
Εφαπτόμενο επίπεδο (εφαπτόμενη ευθεία) σε λεία επιφάνεια (λεία καμπύλη). Θα χρησιμοποιήσουμε συναρ. $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n \geq 2$, C^1, $\nabla F(x,y,z) \neq \vec{0}$, $\vec{r}: I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ ($F, \vec{r}$ λείες) επειδή θα χρειαστούμε την Αλ. Παραγώγιση (όπου οι συν. είναι διαφορίσιμες)

Βασικός Ορισμός

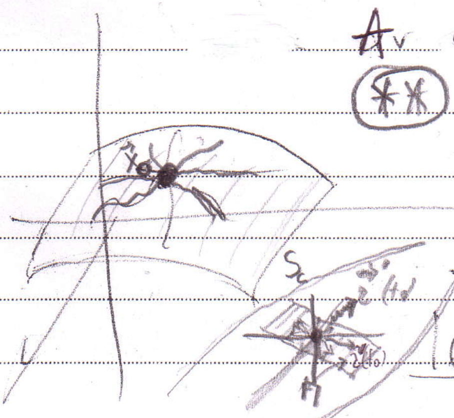
Έστω $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, I = διάστημα, $\exists\, \vec{r}'$. Τότε η ευθεία $\vec{l}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (περνά από το $\vec{r}(t_0)$ και είναι $\parallel \vec{r}'(t_0)$) καλείται Εφ. Ευθεία της $\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(t)$ στο σημείο $\vec{r}(t_0)$.



Ορισμός Εφ. Επιπέδου (ευθείας για $n=2$) μιας επιφάνειας (καμπύλης)

Έστω $c \in \mathbb{R}$, $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boxed{S_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = c\}}$, $x_0 \in S_c$
Εαν $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ τυχαία καμπύλη πάνω στην S_c ($F(\vec{r}(t)) = c$ $t \in I$) που περνά από το $\vec{x}_0$ (δηλ. $\exists\, t_0 \in I$, $\vec{r}(t_0) = x_0$.

[Παίρνω μία τυχαία καμπύλη και ορίζω το $\vec{r}(t_0)$]



Αν όλα τα $\vec{r}'(t_0)$ ανήκουν στο ίδιο (**) επίπεδο Π, τότε:
το εφ. επίπεδο στην S_c στο x_0 ορίζεται το $\vec{x}_0 + \Pi$.

Ισοσταθμικές επιφάνειες (καμπύλες για $n=2$)

$F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$
Η $S_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = c\}$ καλείται ισοσταθμική επιφάνεια, στάθμης c

Εαν το βαθμωτό πεδίο μετρά θερμοκρασία, ύψος τότε η S_c καλείται ισοθερμική, ισοϋψής κτλ

Παράδειγμα:

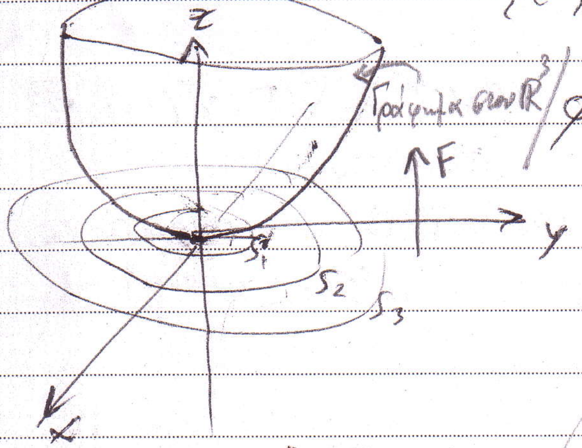
1) $F(x,y) = x^2+y^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

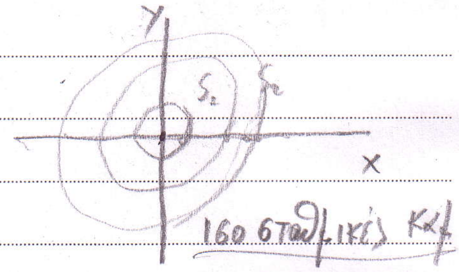
$c\in\mathbb{R}$, $S_c = \{(x,y) : x^2+y^2 = c\}$ $c>0$

$\{(0,0)\}$, $c=0$

$\varnothing$ $c<0$

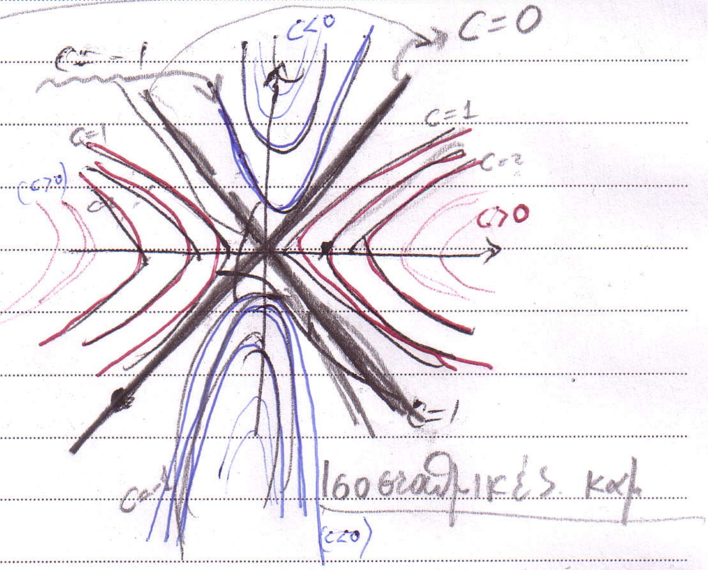
για $n=2$ (οι τομές είναι κύκλοι, το γράφημα της F είναι παραβολοειδές στον $\mathbb{R}^3$)

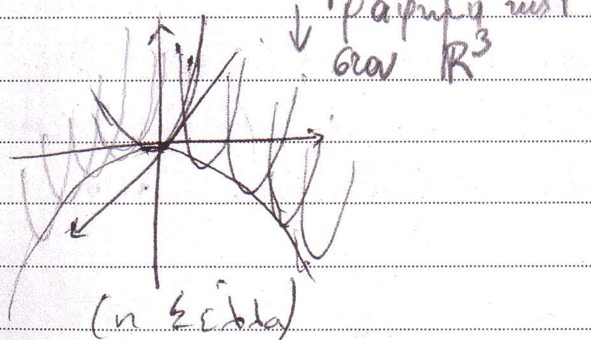




Παράδειγμα

2) $F(x,y) = x^2-y^2$



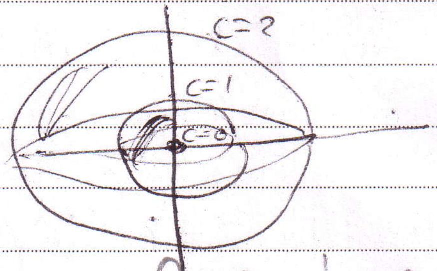


$$S_1 = \{(x,y) : x^2-y^2=1\} = \{(x,\sqrt{x^2-1}) : |x|\geq 1\} \cup \{(x,-\sqrt{x^2-1}) : |x|\geq 1\}$$

Παράδειγμα

3) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- οι ισοσταθμικές είναι σφαίρες στον $\mathbb{R}^3$
- Το γράφημα της F είναι κώνος στον $\boxed{\mathbb{R}^4}$



Εύρεση του καθέτου διανύσματος στην επιφάνεια (καμπύλη, n=?) : (ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗ) $S_c = \{ \vec{x} : F(\vec{x}) = c \}$ στο $\vec{x_0} \in S_c$.

Έστω $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ πάνω στην S_c, $\vec{r}(t_0) = \vec{x_0}$ δηλ. $F(\vec{r}(t)) = c$ (*), $t \in I$ και $\vec{r}(t_0) = \vec{x_0}$
$(F \circ \vec{r})$

Από αλυσιδωτή παραγώγιση, (*) $0 = \frac{d(F \circ \vec{r}(t))}{dt} = \nabla F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$

Άρα $\nabla F(\vec{x_0}) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$ (= ανάδελτα κάθετο σε οποιοδήποτε εφαπτ. διάνυσμα)

δηλ. $\nabla F(\vec{x_0}) \perp \Pi$ (**)

Άρα εξ. εφ. επιπέδου της S_c στο $\vec{x_0}$

είναι: $\boxed{(\vec{x} - \vec{x_0}) \cdot \nabla F(\vec{x_0}) = 0}$

Άρα το $\nabla F(\vec{x_0})$ κάθετο στο εφ. επίπεδο της S_c στο $\vec{x_0}$. Λέμε ότι $\nabla F(\vec{x_0})$ είναι κάθετο στης S_c στο $\vec{x_0}$. Η κάθετη ευθεία στην S_c στο $\vec{x_0}$: $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{x_0} + \lambda \nabla F(\vec{x_0})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (δηλ. η $\perp$ στο εφ. επίπεδο)

Ειδική περίπτωση: Η επιφάνεια S_c ως ΓΡΑΦΗΜΑ συνάρτησης

$S_c = \{ (\vec{y}, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : z = f(\vec{y}) \}$

δηλ. η S_c είναι το γράφημα της $z = f(\vec{y})$ (S_c καμ. εξίσωσης $z = f(y)$)

$F(\vec{y}, z) = z - f(\vec{y}) = 0$ (Αν. εξίσωση)

$\nabla F(\vec{y_0}, z_0) = (-\nabla f(\vec{y_0}), 1)$. Το εφ. επίπεδο στο $(\vec{y_0}, z_0)$:

$$\left((\vec{y}, z) - (\vec{y_0}, z_0)\right) \cdot (-\nabla f(\vec{y_0}), 1) = 0$$

$$\boxed{z - z_0 = \nabla f(\vec{y_0})(\vec{y} - \vec{y_0})}$$ (η Γραφικοποίηση της f στο $\vec{y}_0$)

Αναλυτικά για $n=2$, $n=3$

• $n=2$

$\Gamma_c = \{(x,y) \cdot F(x,y) = c\}$ (Αναλ. εξίσωση)

$(x_0, y_0) \in \Gamma_c$. Τότε η εφ. ευθεία της Γ_c στο (x_0, y_0)

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

αν $\Gamma_c = \{(x,y) \cdot y = f(x)\}$ στο $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ (Καρ. εξίσωση)

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$ (Γνωστό!) εξ. εφαπτ.

(Γραφικοποίηση της f στο x_0)

• $n=3$

$S_c = \{(x,y,z) \cdot F(x,y,z) = c\}$, $(x_0, y_0, z_0) \in S_c$

εφ. επιπ. στο (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

αν $S_c = \{(x,y,z) \cdot, z = f(x,y)\}$

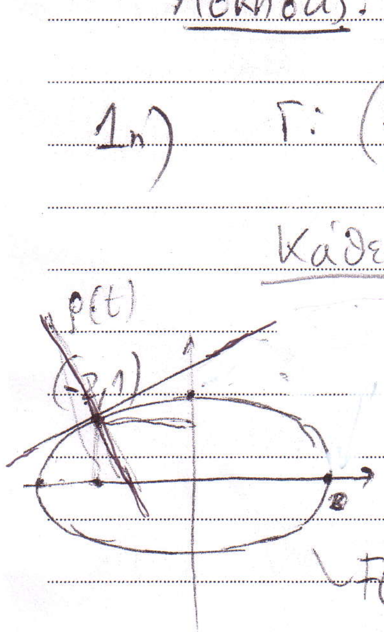
$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (x_0, y_0)(y - y_0)$$

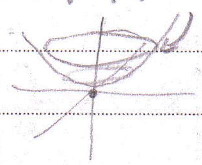
(Γραφικοποίηση της f στο (x_0, y_0))

Ασκήσεις:

1η) $\Gamma: \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 2$. Εφ. ευθεία στο $(-2,1)$

Κάθετη στην Γ στο $(-2,1)$





- α΄ τρόπος: $F(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ ελλειπτικό παραβολοειδές

Γ ισοσταθμική $F(x,y) = 2$ **Αναλυτική Εξίσωση**

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

$\left.\begin{matrix} x_0 = -2 \\ y_0 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$ εφ. ευθεία

- β΄ τρόπος: τοπικά η Γ είναι το γράφημα της $y = \sqrt{2 - x^2/4}$ $(x, f(x))$

Εφ. Ευθεία: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$$

Καρτεσιανή Εξίσωση

- γ΄ τρόπος

$$\begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{2}} = \text{συν}\, t \\ \frac{y}{\sqrt{2}} = \text{ημ}\, t \end{cases}$$

$\vec{r}(t) = (2\sqrt{2}\,\text{συν}\, t, \sqrt{2}\,\text{ημ}\, t)$ **Παραμετρική εξίσωση**

$\vec{r}\,'(t) = (-2\sqrt{2}\,\text{ημ}\, t, \sqrt{2}\,\text{συν}\, t)$

$(-2,1) = (-2\sqrt{2}\,\text{ημ}\, t_0, \sqrt{2}\,\text{συν}\, t_0)$

Εφ. Ευθεία: $\vec{\ell}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda(\vec{r}\,'(t_0)) =$
$= (-2,1) + \lambda(-2,-1)$

$\left.\begin{matrix} x = -2 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{matrix}\right/ \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$

→ Κάθετη ευθεία της Γ στο $(-2,1)$

$$\vec{p}(t) = (-2,1) + t\nabla F(-2,1) =$$

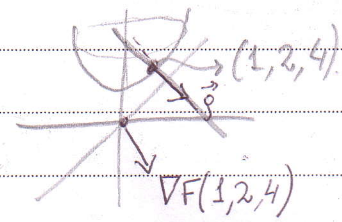
$$= (-2,1) + t\left(\frac{2(-2)}{4}, 2\cdot 1\right) =$$

$$= (-2,1) + t(-1,2), \quad \begin{cases} x=-2-t \\ y=1+2t \end{cases} \Rightarrow 2x+y=-3$$

2η Άσκηση

Να βρεθεί εφ. επιπ. + κάθετη ευθεία στην επιφάνεια

$x^2+y^2+z-9=0$ στο $(1,2,4)$



α' τρόπος:

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z$, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $S_9=\{(x,y,z) . F(x,y,z)=9\}$

Εφ. επιπ.: $(x-1)\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,4)+(y-2)\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,4)+(z-4)\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,4)=0$

Θεωρούμε την επιφ. εάν ισοσταθμική

$\nabla F(1,2,4)\cdot(x-1,y-2,z-4)=0$

$$\boxed{2x+4y+z=14}$$

β' τρόπος: $z=-x^2-y^2+9$ στο $(1,2,4)$

Θεωρούμε την επιφάνεια εάν το γράφημα της συνάρτησης

Εφ. Επιπ.: $f(x,y)=-x^2-y^2+9$

$$z=4+\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)$$

$z=14-2x-4y$

Κάθετη ευθεία

$$\vec{p}(t)=(1,2,4)+t\nabla F(1,2,4)$$

$$=(1,2,4)+t(2,4,1)$$

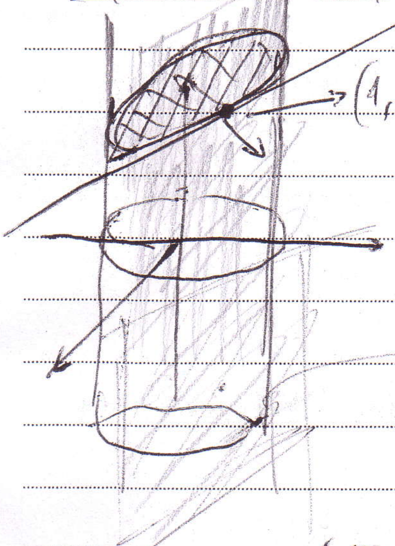
κύλινδρος ...!

3) επιφάνειες. $F(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$

$G(x,y,z)=x+z-4=0$ ← επίπεδο...!!!

τέμνονται σε μιά έλλειψη.

Εφ. της έλλειψης στο (1,1,3)



α' τρόπος

εφαπτόμενο επίπεδο στον κύλινδρο:

$$\nabla F(1,1,3)\,(x-1,y-1,z-3)=0$$

$$2x+2y=4$$

Εφαπτ. Ευθεία: $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+z-4=0 \end{cases}$ Τομή των επιπέδων

(β' τρόπος (Thomas) σελ. 890 Σχήμα παρ. 11.)

παίρνει κάθετο στον κύλινδρο, κάθετο στο επίπεδο και τότε το εξωτερ. γινόμενο είναι το // εφαπτομένη ευθεία

Κάθετο στον κύλινδρο στο (1,1,3) : $\nabla F(1,1,3)=(2,2,0)$

Κάθετο στο επίπεδο : $\nabla G(1,1,3)=(1,0,1)$

Άρα η εφ. ευθεία // στο $\nabla F(1,1,3)\times\nabla G(1,1,3)=(2,-2,-2)$.

$\vec{r}(t)=(1,1,3)+t(2,-2,-2)$ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \\ z=3-2t \end{cases}$

ή $\begin{cases} x+y=2 \\ x+z=4 \end{cases}$ Τομή των επιπέδων

Σημ: Με όποιον τρόπο θέλουμε βρίσκουμε το εφ. επίπεδο (ευθεία) σε επιφάνεια (καμπύλη).
Προτιμάμε τον απλούστερο!