15ο ΜΑΘΗΜΑ 8-4-2009

Πολυώνυμο Taylor, Τύπος Taylor για συναρτήσεις 1 και 2 μεταβλητών

(I) Έστω $P_0(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\dots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$.

Τότε $P_0'(x)=n\alpha_n x^{n-1}+(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2}+\dots+2\alpha_2x+\alpha_1$. Άρα $\alpha_1=\frac{P_0'(0)}{1!}$

$P_0''(x)=n(n-1)\alpha_n x^{n-2}+(n-2)(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-3}+\dots+2\alpha_2$. Άρα $\alpha_2=\frac{P_0''(0)}{2!}$

$P_0^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\,\alpha_n$. Άρα $\alpha_n=\frac{P_0^{(n)}(0)}{n!}$

Γενικά $P_{x_0}(x)=\alpha_n(x-x_0)^n+\alpha_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\dots+\alpha_1(x-x_0)+\alpha_0$, $\alpha_k=\frac{P_{x_0}^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=1,2,\dots,n$

και $P_{x_0}(x_0)=\alpha_0$

Άρα $P_{x_0}(x)=P_{x_0}(x_0)+\frac{P_{x_0}'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{P_{x_0}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

δηλ. το πολυώνυμο P_{x_0} δίνεται συναρτήσει των παραγώγων του στο x_0.

Ορίζοντας: $D_1P_{x_0}(x_0)(x-x_0)=P_{x_0}'(x_0)(x-x_0)$ το 1-διαφορικό του P_{x_0} στο x_0

$D_2P_{x_0}(x)(x-x_0)=P_{x_0}''(x_0)(x-x_0)^2$ το 2-διαφορικό του P_{x_0} στο x_0

$D_nP_{x_0}(x)(x-x_0)=P_{x_0}^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ το n-διαφορικό του P_{x_0} στο x_0

Τότε $$\boxed{P_{x_0}(x)=P_{x_0}(x_0)+\frac{1}{1!}D_1P_{x_0}(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{1}{n!}D_nP_{x_0}(x_0)(x-x_0)^n.}$$

Το ζητούμενο: Εάν $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ "καλή" συνάρτηση (π.χ ημx, συνx, lnx, e^x, εφx, τοξεφx, $(1+x)^\alpha$ ($\alpha>0$)) μπορούμε να "προσεγγίσουμε" την f σε κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ με κάποιο πολυώνυμο n βαθμού ($n\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$);

Η προσέγγιση έχει ήδη γίνει για $n=0$ (δηλ. σταθερό πολυώνυμο) με δυο τρόπους

i) αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει c_x μεταξύ των x, x_0 ώστε $f(x)=f(x_0)+f'(c_x)(x-x_0)$

Το $T_{0,x_0}(x)=f(x_0)$, και $R_{0,x}(x)=f'(c_x)(x-x_0)$ δίνει

$f(x)=T_{0,x_0}(x)+R_{0,x}(x)$ (ΘΜΤ)

και ii) αν η f' είναι ολοκληρώσιμη, τότε $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ (ΘΘΑΛ)

Το $T_{0,x_0}(x)=f(x_0)$ και $R_{0,x}(x)=\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$. δηλ.

$f(x)=T_{0,x_0}(x)+R_{0,x}(x)$

Ένας προφανής τρόπος για να οριστεί προσεγγιστικό πολυώνυμο για συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ που έχει $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι να πάρουμε ($x_0\in(\alpha,\beta)$ σταθερό)

$$\boxed{\begin{aligned} T_{n,x_0}(x)&=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ R_{n,x_0}(x)&=f(x)-T_{n,x_0}(x)\end{aligned}}$$ και

Το T_{n,x_0} καλείται πολυώνυμο Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$) τάξης n της f στο x_0 και το R_{n,x_0} υπόλοιπο Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$) τάξης n της f στο x_0.

Ορίζοντας τα διαφορικά όπως στα πολυώνυμα θα έχουμε

$$T_{n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}D_1 f(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}D_n f(x_0)(x-x_0)^n.$$

Ιδιότητες του T_{n,x_0}

1) $T_{n,x_0}(x_0)=f(x_0)$ και $T^{(k)}_{n,x_0}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$, $k=1,2,\ldots n$.

δηλ. το πολυώνυμο Taylor έχει k-παράγωγο στο x_0 ίση με αυτήν της f $k=1,2,\ldots n$. (βλ. παραγώγους πολυωνύμου P_{x_0})

2) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

δηλ. το υπόλοιπο είναι συνάρτηση "μικρή" σε σχέση με το T_{n,x_0}

(Η απόδειξη ισχύει για $n=1$ από το ορισμό της $f'(x_0)$ και για $n\geq 2$ αποδεικνύεται επαγωγικά με την χρήση κανόνα L'Hospital)

Πως μπορούμε να πάρουμε το R_{n,x_0};; δηλ. το υπόλοιπο $f(x_0)-T_{n,x_0}$

Την απάντηση έδωσε ο B. Taylor (1685–1731) και ο C. MacLaurin (1698–17 και είναι η εξής για

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ που έχει $f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ στο (α,β)

Θεώρημα Taylor / Τύπος Taylor

Εάν $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ με $f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ στο (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$ Τότε για $x\in(\alpha,\beta)$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^2+R_{n,x_0}(x)$$

δηλ. $f(x)=T_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0}(x)$. Όπου :

$$\boxed{R_{n,x_0}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)(x-x_0)^{n+1}}$$ για κάποιο c_x μεταξύ των x_0, x.

Σημείωση : i) Η έκφραση αυτή του υπολοίπου είναι μορφής Lagrange. Υπάρχουν άλλες εκφράσεις λιγότερο εύχρηστες (του Cauchy και η ολοκληρωτική)

ii) Η απόδειξη του Θ. Taylor γίνεται με την βοήθεια του Γενικευμένου ΘΜΤ (του υπολοίπου Cauchy με το ΘΜΤ, του ολοκληρωτικού με ΘΘΑΛ)

iii) Το Θ. Taylor είναι γενίκευση του ΘΜΤ και του ΘΘΑΛ.

Σειρά Taylor (MacLaurin)

Εάν η $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ έχει παραγώγους κάθε τάξης λέμε ότι η f αναπτύσσεται στο x_0 σε σειρά Taylor (MacLaurin αν $x_0=0$) αν

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}T_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \left(f^{(0)}(x_0)=f(x_0)\right)$$ για $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subseteq(\alpha,\beta)$ (για κάποιο $\varepsilon>0$)

Ισοδύναμα $\lim_{n\to+\infty}R_{n,x_0}(x)=0$ για $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

Παραδείγματα

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots, x\in\mathbb{R}$, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^n$ (ξ μεταξύ των $0,x$)

2) $ημx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, x\in\mathbb{R}$, $ημx=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{ημ\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ (>>)

3) $συνx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots, x\in\mathbb{R}$, $συνx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{συν\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ (>>)

⋮

Σημείωση. Υπάρχουν συναρτήσεις πχ. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ $x\neq0$, $f(0)=0$ που δεν προσεγγίζονται με πολ. Taylor, δηλ. το $R_{n,0}(x)\not\to0$ για $n\to+\infty$. ($x\neq0$)

• Για σχήματα βλ. Thomas 650-656 ή Ηλ. Τάξη (Πολ. Taylor)

(II) Πολυώνυμο Taylor για συναρτήσεις 2 μεταβλητών

Έστω $p(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(u,v)\cdot(x,y)+\delta$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.

δηλ $p(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+ux+vy+\delta$

Τότε $D_1 p(0,0)(x,y)=ux+vy$ και $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0)=2\alpha$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(0,0)=2\beta$, $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0,0)=2\gamma$

Ορίζοντας $D_2 p(0,0)(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 P(0,0)=:x^2\frac{\partial^2 P(0,0)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 P(0,0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 P(0,0)}{\partial y^2}y^2$

παίρνουμε ότι: $P(x,y)=P(0,0)+\frac{1}{1!}D_1 P(0,0)(x,y)+\frac{1}{2!}D_2 P(0,0)(x,y)$

Γενικά αν $D_k P(0,0)(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k P(0,0)$ είναι το k-διαφορικό ενός πολυωνύμου p n βαθμού ως προς x,y θα έχουμε

$$P(x,y)=P(0,0)+\frac{1}{1!}D_1 P(0,0)(x,y)+\dots+\frac{1}{n!}D_n P(0,0)(x,y).$$

Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση μιας μεταβλητής για $f:(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους, ορίζεται το πολυώνυμο Taylor της f στο (x_0,y_0), τάξης n $T_{n,(x_0,y_0)}(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}D_1 f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+\dots+\frac{1}{n!}D_n f(x_0,y_0)(x-x_0,y$

και το υπόλοιπο $R_{n,(x_0,y_0)}^{(x,y)}=f(x,y)-T_{n,(x_0,y_0)}$ / $D_k f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f($

Οι ιδιότητες είναι ανάλογες με αυτές που ισχύουν για συναρτήσεις μιας μεταβλητής και $R_{n,(x_0,y_0)}(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}D_{n+1}f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)$ για κάποιο σημείο (ξ_1,ξ_2) στο ευθ. τμήμα που ενώνει τα (x_0,y_0), (x,y).

Σημείωση. Η απόδειξη για το υπόλοιπο γίνεται από το Θ. Taylor και το Θεώρημα Αλυσιδωτής Παραγώγισης.

- Για σχήματα βλ. Ηλ. Τάξη (Πολ. Taylor)

Τύπος υπολοίπου για γραμμική προσέγγιση
Σφάλμα στην γραμμική προσέγγιση.

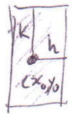
Έστω $f: B=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$, C^2-συνάρτηση, $(x_0,y_0)\in B$. Τότε υπάρχει $(\xi_1,\xi_2)\in B$ με

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + D_1 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2!} D_2 f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)$$

ή

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2 f_{xx}(\xi_1,\xi_2) + 2(x-x_0)(y-y_0) f_{xy}(\xi_1,\xi_2) + (y-y_0)^2 f_{yy}(\xi_1,\xi_2)\right]$$

Αν $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}| \le M$ για $(x,y)\in[x_0-h, x_0+h]\times[y_0-k, y_0+k]\subseteq B$



τότε το υπόλοιπο $R_{2,(x_0,y_0)}^{(x,y)}$, δηλαδή το σφάλμα $E(x,y)$ ικανοποιεί την

$$|E(x,y)| \le \frac{M}{2}\left[|x-x_0| + |y-y_0|\right]^2.$$

Σημείωση: Ανάλογα φράγματα προκύπτουν για $R_{\nu,(x_0,y_0)}$, $\nu\ge 3$.

Ασκήσεις

1) Έστω η $f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$. Να ευρεθεί γραμμική προσέγγιση της f στο $(3,2)$ καθώς και άνω φράγμα του σφάλματος για (x,y): $|x-3|\le 0,1$ και $|y-2|\le 0,1$

Η γραμμικοποίηση είναι $L(x,y)=8+4(x-3)+(-1)(y-2)=4x-y-2$.
Επειδή $|f_{xx}|=2$, $|f_{xy}|=1$, $|f_{yy}|=1$ θα έχουμε $\underset{(M=2)}{|E(x,y)|} \le \frac{2}{2}(0,1+0,1)^2=0,04$.
(Αν το εκφράσουμε ως ποσοστό της $f(3,2)=8$ τότε είναι $\le \frac{0,04}{8}\cdot 100 = 0,5\%$)

Άρα αν πάρουμε x,y με $|x-3|, |y-2|\le 0,1$ τότε η $f(x,y)$ προσεγγίζεται από την $L(x,y)$ με σφάλμα 0,0

2) Έστω η $f(x,y)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu y$. Να ευρεθεί δευτεροβάθμια προσέγγιση της f στο $(0,0)$ καθώς και άνω φράγμα για $|x|,|y|\le 0,1$ του σφάλματος.

$$T_{2,(0,0)}^{(x,y)} = f(0,0) + (x f_x + y f_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}) = xy. \quad (\text{Παράγωγοι στο } (0,0))$$

$$R_{2,(0,0)}^{(x,y)} = E(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) \quad \left(\text{παράγωγοι στο } (\xi_1,\xi_2)\right), \ (|f_{xxx}|\le 1 \text{ κτλ})$$

Βρίσκουμε $|E(x,y)| \le \frac{1}{6}\left((0,1)^3 + 3(0,1)^3 + 3(0,1)^3 + (0,1)^3\right) = \frac{8}{6}(0,1)^3$

Η θεωρία γενικεύεται για συναρτήσεις n-μεταβλητών $(n\ge 3)$