Πολλαπλά Ολοκληρώματα.

1) Στον $\mathbb{R}^n$ το σύνολο $I=[\alpha_1,b_1]\times\dots\times[\alpha_n,b_n]=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \alpha_i \le x_i \le b_i \ ,i=1,\dots n\}$ καλείται ορθογώνιο διάστασης n. ($\alpha_i<b_i$, $\alpha_i,b_i\in\mathbb{R}$ $i=1,2,\dots n$) ($n\in\mathbb{N}, n\geq 1$)

Ιδιαίτερα : Το I για $n=1$ καλείται (κλειστό) διάστημα, για $n=2$ καλείται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, για $n=3$ καλείται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

2) Ορίζουμε ως μέτρο του I το $\mu(I)=(b_1-\alpha_1)\cdot(b_2-\alpha_2)\cdots(b_n-\alpha_n)$

Ιδιαίτερα : Το $\mu(I)$ για $n=1$ καλείται μήκος, για $n=2$ εμβαδόν, για $n=3$ όγκος του I.

3) Εάν το I είναι ορθογώνιο και P_k είναι διαμέριση(*) του $[\alpha_k,b_k]$ $k=1,\dots,n$ τότε το $P=P_1\times P_2\times\dots\times P_n$ καλείται διαμέριση του I.

((*) Ως γνωστόν αν $[\gamma,\delta]\subseteq\mathbb{R}$ η $P=\{\gamma=x_0<x_1<\dots<x_\nu=\delta\}$ καλείται διαμέριση του $[\gamma,\delta]$

Ολοκλήρωμα Riemann

1) Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ορθογώνιο I του $\mathbb{R}^n$.
Εάν P είναι διαμέριση του I και $I_1,\dots,I_m$ είναι τα (υπο)ορθογώνια που αποτελείται η P ορίζουμε
$m_k=\inf\{f(\vec{x}):\vec{x}\in I_k\}$, $M_k=\sup\{f(\vec{x}):\vec{x}\in I_k\}$ $k=1,\dots m$ και
$U(f,P)=\sum_{k=1}^{m} m_k\,\mu(I_k)$, $L(f,P)=\sum_{k=1}^{m} M_k\,\mu(I_k)$ τα άνω και κάτω αθροίσματα Riemann ως προς την διαμέριση P.

Ως άνω και κάτω ολοκλήρωμα Riemann της f στο I ορίζουμε :

$$\overline{\int_I} f\,d\vec{x}=\inf\{U(f,P): P \text{ διαμέριση του } I\}$$

$$\underline{\int_I} f\,d\vec{x}=\sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } I\}.$$

Εάν $\overline{\int_I} f\,d\vec{x}=\underline{\int_I} f\,d\vec{x}$ τότε η f καλείται ολοκληρώσιμη στο I κατά Riemann και την κοινή τιμή $\int_I f\,d\vec{x}$ καλούμε ολοκλήρωμα Riemann της f στο I

2) Έστω $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού φραγμένο σύνολο B του $\mathbb{R}^n$.
Εάν I είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ με $B \subseteq I$ ορίζουμε $g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in B \\ 0 & \vec{x} \in I \setminus B \end{cases}$
Εάν υπάρχει το ολοκλήρωμα της $g: I \to \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε
$\int_B f d\vec{x} =: \int_I g \, d\vec{x}$ και η f καλείται ολοκληρώσιμη στο B.

Σημείωση: Ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες (γραμμικότητα, προσθετικότητα) που γνωρίζουμε για $n=1$.

Απλά σύνολα στον $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Το B καλείται x-απλό αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\varphi, \psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi \leq \psi$.
Ανάλογα ορίζεται το y-απλό.
Απλό καλείται το σύνολο που είναι x και y απλό.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Το B καλείται xy-απλό αν $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, w_1(x,y) \leq z \leq w_2(x,y)\}$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ x-απλό σύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $w_1, w_2 : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $w_1 \leq$
Ανάλογα ορίζονται τα yx-απλά, xz-απλά, zx-απλά, yz-απλά zy-απλά.
Απλό καλείται το σύνολο που είναι xy και yx και xz και zx και yz και zy απλό.

Θεώρημα Fubini (Διαδοχικών Ολοκληρωμάτων)

1) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^2$ x-απλό σύνολο και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει: $\int_B f d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right] dx$
Ανάλογα για y-απλό σύνολο.

2) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$ xy-απλό σύνολο και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B και ισχύει: $\int_B f d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right] dx$
Ανάλογα για $yx, \ldots zy$ απλό σύνολο.

Ιδιαίτερως: Για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, $\int_I f d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta f(x,y) dy \right] dx = \int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y) dx \right] dy$.
και για $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \times [\varepsilon, \zeta]$, $\int_I f d\vec{x} = \int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta \left[\int_\varepsilon^\zeta f(x,y,z) dz \right] dy \right) dx = \cdots = \int_\varepsilon^\zeta \left(\int_\gamma^\delta \left[\int_\alpha^\beta f(x,y,z) dx \right] dy \right)$

Όγκος στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $B\subseteq\mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο. Ορίζουμε ως όγκο το B το $V(B)=\int_B 1\,d\vec{x}$ (αν υπάρχει).
Για $n=1,2,3$ καλείται μήκος, εμβαδόν, όγκος του B, αντίστοιχα.

Ιδιαίτερα:
- Αν το B είναι x-απλό στον $\mathbb{R}^2$, τότε το εμβαδόν του $A(B)=\int_B 1\,dxdy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\,dy\right]dx = \int_\alpha^\beta (\psi(x)-\varphi(x))dx$
- Αν το B είναι xy-απλό στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο όγκος του $V(B)=\int_B 1\,dxdydz = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{w_1(x,y)}^{w_2(x,y)} 1\,dz\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (w_2(x,y)-w_1(x,y))\,dy\,dx$.
- Ανάλογα για τις άλλες περιπτώσεις για το B.
- Αν το B είναι ορθογώνιο τότε $V(B)=\mu(B)$

Μάζα, Ροπές, Κέντρο βάρους στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $B\subseteq\mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο με πυκνότητα $\delta(\vec{x})$ στο $\vec{x}\in B$. Ορίζουμε ως μάζα του B το $M=\int_B \delta(\vec{x})d\vec{x}$.

Εάν $M_{x_2x_3\dots x_n}=\int_B x_1\delta(\vec{x})d\vec{x}$, $M_{x_1x_3\dots x_n}=\int_B x_2\delta(\vec{x})d\vec{x}$, …, $M_{x_1x_2\dots x_{n-1}}=\int_B x_n\delta(\vec{x})d\vec{x}$
είναι οι πρώτες ροπές του B το κέντρο βάρους του B είναι το σημείο

$$\left(\frac{M_{x_2\dots x_n}}{M}, \frac{M_{x_1x_3\dots x_n}}{M}, \dots, \frac{M_{x_1x_2\dots x_{n-1}}}{M}\right) \qquad (M\neq 0)$$

Αλλαγή μεταβλητής

Έστω $\vec{g}=(g_1,\dots,g_n): S\to\mathbb{R}^n$ 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό σύνολο $S\subseteq\mathbb{R}^n$.
Υποθέτουμε ότι η $\vec{g}$ είναι C^1 (υπάρχουν οι μερ. παράγωγοι και είναι συνεχείς) και η Ιακωβιανή ορίζουσα $J_{\vec{g}}(\vec{t})=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}_{(\vec{t})}\neq 0$ για κάθε $\vec{t}\in S$.

Εάν $f:X\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $X\subseteq g(S)$ είναι φραγμένο σύνολο και η f είναι ολοκληρώσιμη στο X, τότε $\int_X f(\vec{x})d\vec{x}=\int_{\vec{g}^{-1}(X)} f(\vec{g}(\vec{t}))\,|J_{\vec{g}}(\vec{t})|\,d\vec{t}$

Σημείωση: Για $n=1$, αν $g:[\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ (επί) $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(g(t))|g'(t)|dt$. (*)
Η απόδειξη για κάθε $n\in\mathbb{N}$ χρησιμοποιεί τον τύπο (*), το θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$) και μαθηματική επαγωγή.
Ο τύπος (*) αποδεικνύεται από το ΘΘΑΛ και τον κανόνα της Αλυσιδωτής Παραγώγισης

Ασκήσεις Α (σε απλά χωρία ολοκλήρωσης)

1) $B=[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x,y)=e^x y + x\,\eta\mu y$

2) $B=[0,1]\times[0,2]$, $f(x,y)=x^2+y^2$

α' διατύπωση : αν η $f=\delta$ μετρά πυκνότητα στο $(x,y)\in B$ να υπολογιστεί η μάζα του B

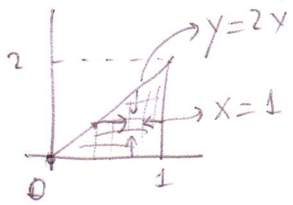
β' διατύπωση : να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού βάσης B, που είναι κάτω από το γράφημα της f

Λύσεις

1) Το ζητούμενο : $\int_1^2\left(\int_0^{\pi/2}(e^x y + x\,\eta\mu y)\,dy\right)dx=\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2(e^x y+x\,\eta\mu y)\,dx\right)dy=\dots=$
$=\frac{\pi^2}{8}e(e-1)+\frac{3}{2}$

2) Το ζητούμενο : $\int_0^1\left(\int_0^2(x^2+y^2)\,dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_0^1(x^2+y^2)\,dx\right)dy=\dots=\frac{10}{3}$

3) Thomas σελ. 959, Παράδειγμα 4



$B=\{(x,y):\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 2x\}$
$=\{(x,y):\ 0\le y\le 2\ ,\ \frac{y}{2}\le x\le 1\}$