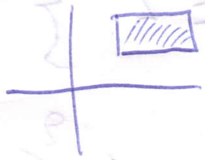
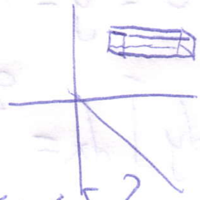
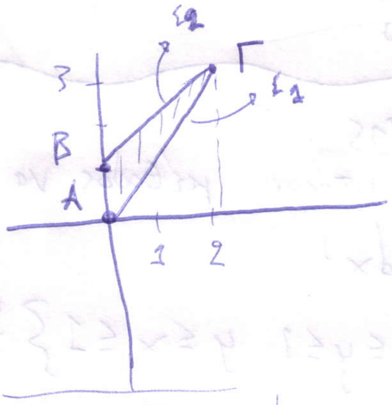
Ορθογώνιο $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

για $n=2$  $n=3$ 

ή $O = \{(x,y)\ \ a \le x \le b,\ \gamma \le y \le \delta\}$

4 Τριγωνική πλάκα αμελητέου πάχους με κορυφές $A(0,0)$ $B(0,1)$ $\Gamma(2,3)$ $\delta(x,y) = x^2+y^2$ / Μάζα πλάκας ?



$$M = \iint_T \delta(x,y)\,dx\,dy \qquad T = \cancel{\{(x,y)}:$$

$$T = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2 \quad \frac{3}{2}x \le y \le x+1\right\}$$

$\varepsilon_1 : y = \frac{3}{2}x$

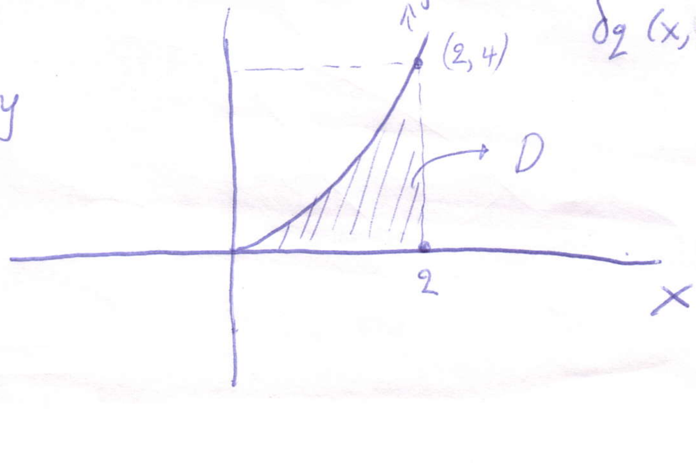
$\varepsilon_2 : y = x+1$

$$M = \int_0^2 \left[\int_{\frac{3}{2}x}^{x+1} x^2+y^2\,dy\right]dx = \int_0^2 \left[\left|x^2y+\frac{y^3}{3}\right|_{\frac{3}{2}x}^{x+1}\right]dx$$

$$= \frac{17}{6}$$

5 Να ευρεθεί η μάζα της πλάκας D η οποία περιβάλλεται από $y=x^2$, $x=2$, $y=0$, $x=0$ όταν $\delta_1(x,y) = xy$ / και το $\delta_2(x,y) = 1$ / $E(D)$ εμβαδόν.

$$M = \iint_D \delta_1(x,y)\,dx\,dy$$



$$D = \{(x,y): \ 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le x^2\} \ x\ \text{απλό}$$

$$= \{(x,y): \ 0 \le y \le 4 \quad +\sqrt{y} \le x \le 2\} \ y\ \text{απλό}$$

$$M_1 = \int_0^2 \left[\int_0^{x^2} xy\, dy\right] dx = \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(x^4 - 0)\, dx$$

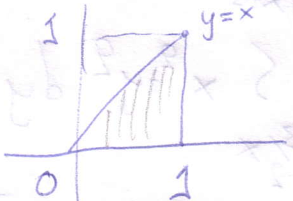
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^5\, dx = \frac{16}{3} \qquad \text{Ομοίως } M_2 = \frac{8}{3}$$

Αφού $\delta_2(x,y) = 1 \Rightarrow M_2 = E(D) = 8/3$

Ασκήσεις (B) Αλλαγή σειράς Ολοκλήρωσης ...

1) $\underbrace{\int_0^1 \int_y^1}_{D} e^{-x^2}\, dx dy$ (Έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει μέθοδος να υπολογισεί $\int e^{-x^2} dx$)

Το $D = \{(x,y) \quad 0 \le y \le 1 \quad y \le x \le 1\}$ $\underline{y\text{-απλό}}$



Το D μετασχηματίζεται σε x απλό

$$D = \{(x,y) \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le x\}$$

Άρα το Ολοκλ. μετασχηματίζεται σε

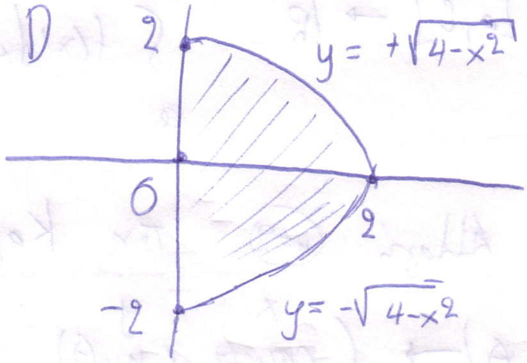
$$\int_0^1 \left[\int_0^x e^{-x^2} dy\right] dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left. -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

2) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \eta\mu(x^2)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \eta\mu(x^2)\,dy \right) dx$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu 1\right)$

3) $I = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dy \right) dx$



$I = \int_{-2}^{2} \left[\int_0^{\sqrt{4-y^2}} 6x\,dx \right] dy = \dots = 32$

ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

$\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$

$S(\subseteq R^n) \to \mathbb{R}^n$ | C^1 απεικόνιση 1-1

S ανοικτό

Προϋποθέσεις εφαρμογής: $C^1 \Rightarrow \exists \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ συνεχείς

$\vec{g}$ διαφορίσιμη.

$$J_{\vec g}(\vec t) = \frac{\partial(g_1 \dots g_n)}{\partial(t_1 \dots t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n(\vec t) \arrow[r, "\vec g"] \arrow[dr] & \mathbb{R}^n(\vec x) \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \vec{g}(S)$ $\quad X =$ φραγμένο

συνεχής και ολοκληρώσιμη στο X

Τότε

$$\boxed{\int_X f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{\vec{g}^{-1}(x)} f(\vec{g}(\vec{t}))\,|J_{\vec{g}}(\vec{t})|\,d\vec{t}}$$

Υποπερίπτωσης (n=1) I] $n=1$ $\quad g:[\gamma,\delta]\to[a,b]$ 1-1 $g' =$ συν, $g'(t)\neq 0$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(g(t))\,|g'(t)|\,dt$

II] Αλλαγή (n=2) π.χ. Καρτεσιανές σε Πολικές στον $\mathbb{R}^2$

$$(r,\theta)\to(\overset{x}{r\,\text{συν}\theta},\ \overset{y}{r\,\text{ημ}\theta}) \qquad r\in(0,+\infty)\ \ \theta\in(0,2\pi)$$

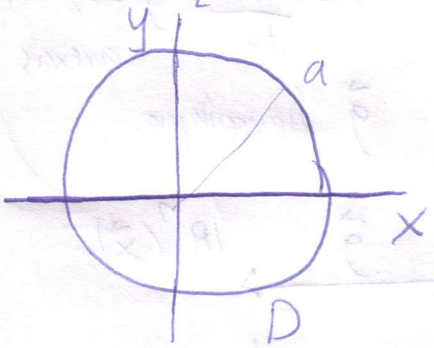
Ορίζουσα μετασχηματισμού

$$J_g = \begin{vmatrix} \text{συν}\theta & -r\,\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & r\,\text{συν}\theta \end{vmatrix} = r\,\text{συν}^2\theta + r\,\text{ημ}^2\theta = r > 0$$

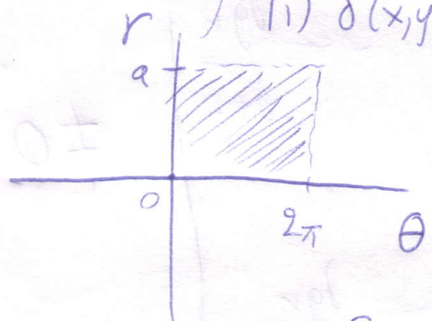
$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{g^{-1}(x)} f(r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

1) $D=\{(x,y)\ \ x^2+y^2\le a^2\}$ $(a>0)$ / i) $E(D)$

ii) $\delta(x,y) = \text{ημ}(x^2+y^2)$



$\leftrightarrow$



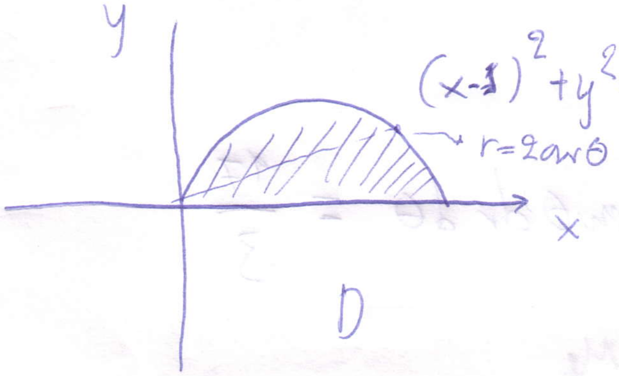
$$E(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a 1\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^2}{2}\,d\theta = \pi a^2$$

$$M=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{a} \eta\mu(r^2)\, r\,dr\right]d\theta = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\, r^2\right)\Big|_0^{a} =$$

$$= \pi\left(1-\sigma\upsilon\nu\, a^2\right)$$

2) $x^2+y^2=2x$ $\quad y\geq 0$ $\quad$ πλάκα (D)

$\delta(x,y)=x^2+y^2$ $\quad$ / $M=?$



$\xrightarrow{}$ Πολικές

Ημιυ. $r^2=2r\,\sigma\upsilon\nu\theta$

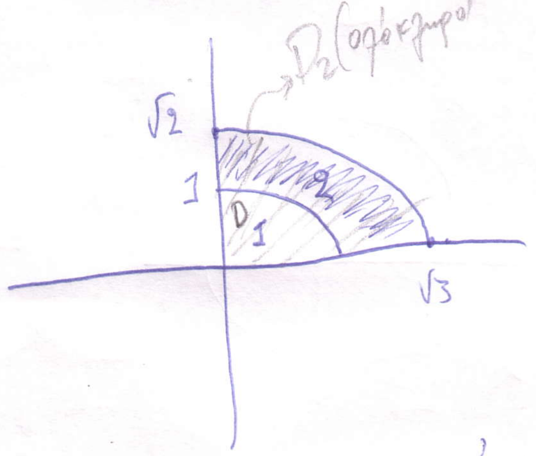
$\boxed{r=2\sigma\upsilon\nu\theta}$

$0\leq\theta\leq\pi/2$

$$M=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sigma\upsilon\nu\theta} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{2^4\,\sigma\upsilon\nu^4\theta}{4}\,d\theta = \dots = 3\pi/2$$

3) $D=\{(x,y) \quad x,y\geq 0 \quad x^2+y^2\geq 1, \ \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leq 1\}$

$\delta(x,y)=x$ $\quad$, $M=?$

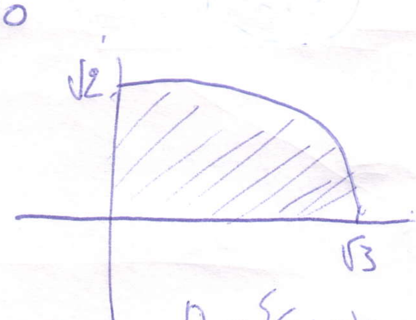


Δεν μπορώ με μετασχηματισμό συντεταγμένων να "ξεφορτωθώ" και την έλλειψη και τον κύκλο ταυτοχρόνως.

Υπολογίζω αρχικά στο D_1 άρα M_1

$$M_1=\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} r^2\sigma\upsilon\nu\theta\,dr\,d\theta$$ είναι γνωστό.

Το M_2



στο $D_2=\{(x,y): \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leq 1$ $(x,y\geq 0)\}$

Για να παραμετρικοποιήσω την έλλειψη

$$\frac{x}{3} = r\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad \frac{x}{2} = r\,\eta\mu\theta \Rightarrow (r,\theta) \to (3r\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2r\,\eta\mu\theta)$$

ορίζουσα $J = 6r$

$$M_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1} 3r\,\sigma\upsilon\nu\theta \cdot 6r\, dr\, d\theta$$

$$M_{\tau\epsilon\lambda} = M_2 - M_1 = 17\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} r^2\,\sigma\upsilon\nu\theta\, dr\, d\theta = \frac{17}{3}$$