ΜΑΘΗΜΑ 18ο

05/05/09

Ανάλυση ΙΙ

• Μετασχηματισμοί στο τριπλό ολοκλήρωμα

a) Κυλινδρικές συντεταγμένες

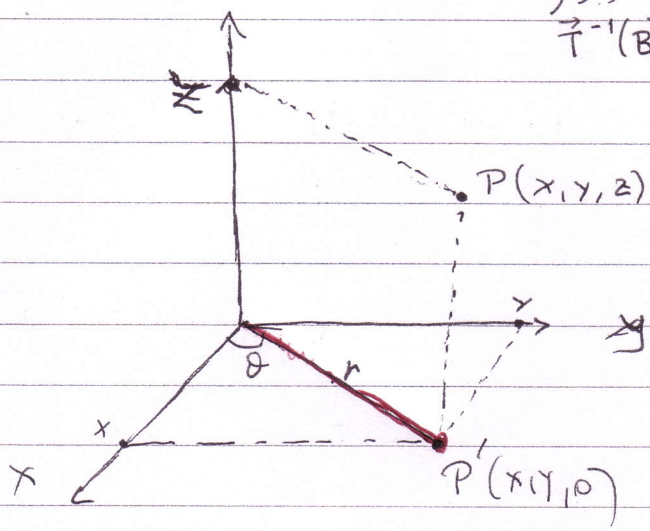
$(r, \vartheta, z) \longrightarrow (r\,\text{συν}\vartheta, r\,\eta\mu\vartheta, z)$

$r \in (0, +\infty)$
$\vartheta \in (0, 2\pi)$
$z \in \mathbb{R}$

Ορίζουσα (Jacobi) του μετασχηματισμού

$$J_{\vec{T}}(r, \vartheta, z) = \begin{vmatrix} \text{συν}\vartheta & r\,\eta\mu\vartheta & 0 \\ \eta\mu\vartheta & r\,\text{συν}\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{συν}\vartheta & -r\,\eta\mu\vartheta \\ \eta\mu\vartheta & r\,\text{συν}\vartheta \end{vmatrix} = r > 0$$

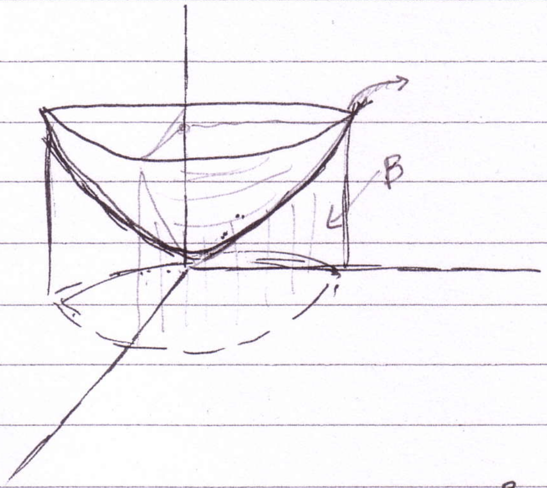
$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} r\, f(r\,\text{συν}\vartheta, r\,\eta\mu\vartheta, z)$$



$x = r\,\text{συν}\vartheta$
$y = r\,\eta\mu\vartheta$ $\Big\}$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$
$z = z$

Ασκήσεις

1) Υπολογισμός όγκου $V(B)$, B βρίσκεται στην 1η στερεά γωνία $(x, y, z \geq 0)$ που περιβάλλεται από τις επιφάνειες $3z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 = 9$.



$x = r\,\text{συν}\theta$

$y = r\,\text{ημ}\theta$

$z = z$

• Παραβολοειδές: $3z = r^2$

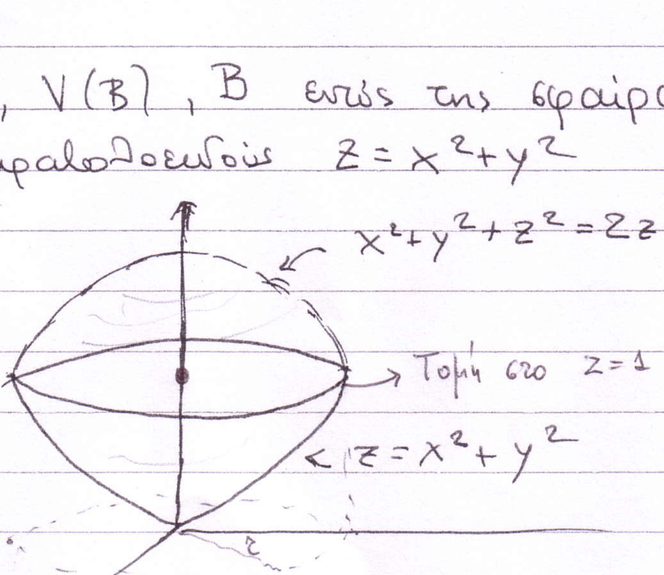
• Κύλινδρος: $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

$$V(B) = \iiint_B 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\int_0^{r^2/3} r\,dz \Big)\, dr\, d\theta \;\circledast$$

$\circledast$ $\vec{T}^{-1}(B) = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq 3,\ 0 \leq z \leq \frac{r^2}{3} \right\}$

Άρα $V(B) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{3} r \cdot \frac{r^2}{3}\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3 \cdot 2}\int_0^{3} r^3\, dr = \frac{27}{8}\pi.$

2) Ομοίως, $V(B)$, B εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 2z$, εντός του παραβολοειδούς $z = x^2+y^2$



• Σφαίρα: $r^2+z^2=2z \to z^2-2z+r^2=0$ $(z\geq 0)$

$\Rightarrow z = 1+\sqrt{1-r^2}$.

• Παραβολοειδές: $z=r^2$

$$\vec{T}^{-1}(B)=\left\{(r,\theta,z):\ \begin{array}{l} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ r^2\le z\le 1+\sqrt{1-r^2} \end{array}\right\}$$

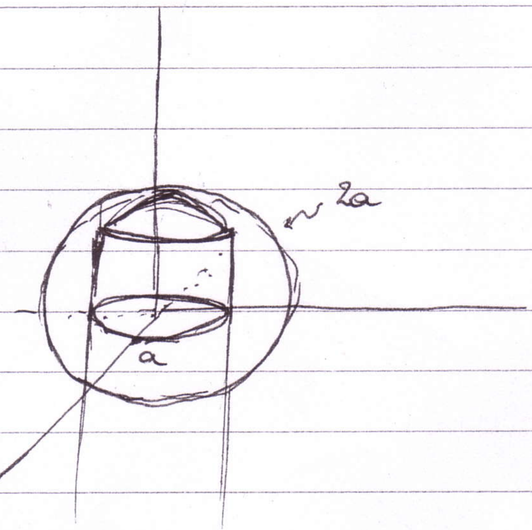
Τομή: $z+z^2=2z$

$\Rightarrow z^2=1 \to \boxed{z=1}$

ή $r=1$

Επομένως $$V(B)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{1+\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \dots = \frac{5\pi}{6}$$

3) Να βρεθεί το κέντρο βάρους στερεού B που βρίσκεται στην 1η στερεά γωνία και περιβάλλεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, τον κύλινδρο $x^2+y^2=a^2$, την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4a^2$ $(a>0)$ και με πυκνότητα μάζας $\delta(x,y,z)=z$.



$$M=\iiint_B \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{yz}=\iiint_B x\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xz}=\iiint_B y\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{xy}=\iiint_B z\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{K.B.}=\left(\frac{M_{yz}}{M},\frac{M_{xz}}{M},\frac{M_{xy}}{M}\right)$$

$$\vec{T}^{-1}(B)=\left\{(r,\theta,z):\ \begin{array}{l}0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le r\le a\\ 0\le z\le\sqrt{4a^2-r^2}\end{array}\right\}$$

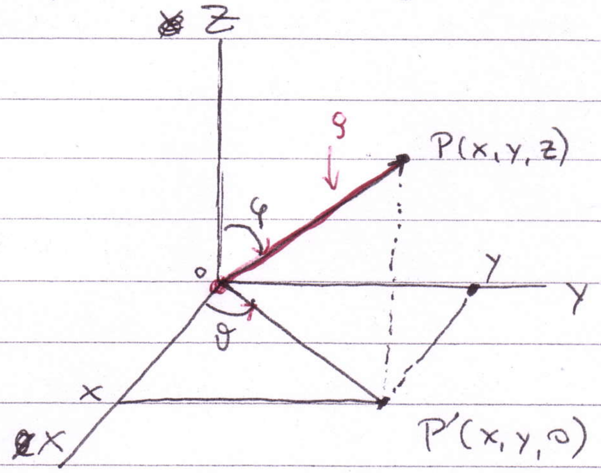
- Κυλινδρος: $r^2=a^2 \Rightarrow r=a$
- Σφαιρα: $r^2+z^2=4a^2 \Rightarrow z=\sqrt{4a^2-r^2}$

$$M=\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} \cdot r\cdot z\,dz\cdot dr\cdot d\theta=\frac{7\pi}{16}a^4.$$

$$M_{xy}=\ldots=\frac{(3^{5/2}-2^5)\pi}{6}a^5$$

$$M_{yz}=\frac{17a^5}{30}=M_{xz}.$$

β) Σφαιρικές Συντεταγμένες



$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge 0$

$\varphi: \sphericalangle(OZ,OP)\in[0,\pi]$

$\theta: \sphericalangle(Ox,OP')\in[0,2\pi]$

$$\begin{cases}x=\rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta\\ y=\rho\eta\mu\varphi\eta\mu\theta\\ z=\rho\sigma\upsilon\nu\theta.\end{cases}$$

$\vec{T}:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$\vec{T}(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\varphi\eta\mu\theta,\ \rho\sigma\upsilon\nu\theta)$

SKAG

- Ορίζουσα (Jacobi) του $\vec{T}$: $\begin{vmatrix} ημφ\,συνθ & -ρ\,ημφ\,ημθ & ρ\,συνφ\,συνθ \\ ημφ\,ημθ & ρ\,ημφ\,συνθ & ρ\,συνφ\,ημθ \\ συνφ & 0 & -ρ\,ημφ \end{vmatrix}$

$= συνφ\,(-ρ^2 ημ^2θ\,ημφ\,συνφ - ρ^2 συν^2θ\,ημφ\,συνφ)$
$- ρ\,ημφ\,(ρ\,ημ^2φ\,συν^2θ + ρ\,ημ^2φ\,ημ^2θ)$

$= -ρ^2 συν^2φ\,ημφ - ρ^2 ημ^2φ \cdot ημφ = -ρ^2 ημφ.$

- $$\iiint_B f(x,y,z)\,d\vec{x} = \iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} f(ρ\,ημφ\,συνθ,\ ρ\,ημφ\,ημθ,\ ρ\,συνθ) \cdot ρ^2 ημφ\ dρ\,dφ\,dθ$$

Ασκήσεις

1) Στερεό: $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$

i) $V(B) = ?$
ii) Μάζα, $δ(x,y,z) = z^2$.

$\vec{T}^{-1}(B) = \{(ρ,θ,φ) : 0 \le θ \le 2π,\ 0 \le φ \le π,\ 0 \le ρ \le a\}$.

i) $$V(B) = \int_0^{2π}\int_0^{π}\int_0^{a} ρ^2 ημφ\, dρ\, dφ\, dθ = 2π \frac{a^3}{3} \int_0^{π} ημφ\, dφ =$$

$$= \frac{2πa^3}{3}\left[-συνφ\right]_0^{π} = \frac{4π a^3}{3}.$$

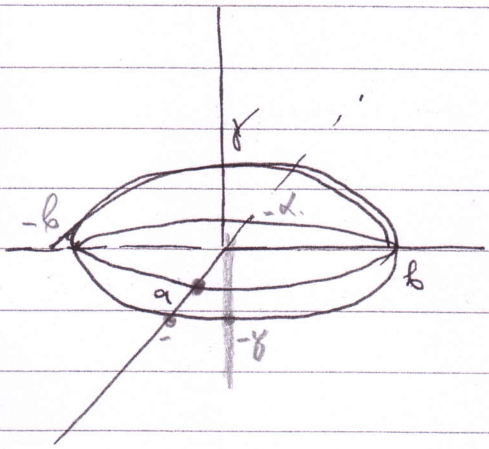
ii) $$M = \int_0^{2π}\int_0^{π}\int_0^{a} (ρ^2 ημφ)(ρ^2 συν^2φ)\, dρ\, dφ\, dθ = \frac{4πa^5}{15}$$

2) $B = \left\{ (x,y,z) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 \leq 1 ,\ (a,b,\gamma > 0) \right\}$

(Ιδιαιτέρως αν $a=b=\gamma \to$ σφαίρα)

$V(B) = ?$

$x' = x/a \quad y' = y/b \quad z' = z/\gamma$.



$x' = \rho\, \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\varphi$
$y' = \rho\, \eta\mu\theta\, \eta\mu\varphi$
$z' = \rho\, \sigma\upsilon\nu\varphi$

Άρα $x = a\rho\, \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\varphi$
$y = b\rho\, \eta\mu\theta\, \eta\mu\varphi$
$z = \gamma\rho\, \sigma\upsilon\nu\varphi$.

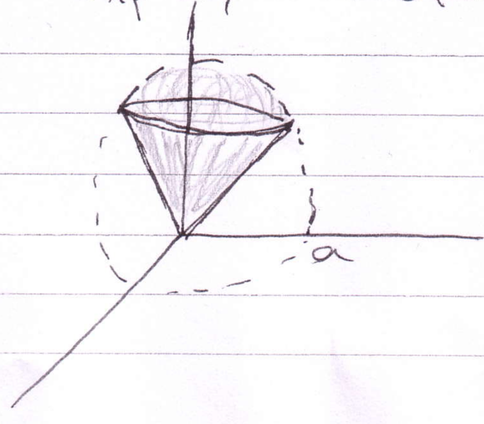
Ορίζουσα (απολύτως) $ab\gamma\rho^2\eta\mu\varphi$

$$V(B) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 ab\gamma\rho^2\eta\mu\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. = \frac{4}{3}\pi ab\gamma.$$

3) $B = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq z^2 ,\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2 ,\ z \geq 0 \right\}$

i) $V(B) = ?$
ii) B_1 κομμάτι του B που βρίσκεται στην 1^{η} στερεά γωνία. Να υπολογιστεί η μάζα του B_1 και το κέντρο βάρους, κ.Β. $\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\left(\begin{array}{l} k>0 \\ k=\sigma\tau\alpha\theta \end{array}\right)$

i)



- Κώνος: $(\rho\, \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\varphi)^2 + (\rho\, \eta\mu\theta\, \eta\mu\varphi)^2 = (\rho\, \sigma\upsilon\nu\varphi)^2$.

$\Rightarrow \eta\mu^2\varphi = \sigma\upsilon\nu^2\varphi$, $\varphi = \pi/4$.

- Σφαίρα: $\rho = a$.

$$V(B) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a} \rho^2 \eta\mu\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \ldots = \frac{2\pi}{3} a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a} (k\rho)(\rho^2 \eta\mu\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{k(\sqrt{2}-1)}{8\sqrt{2}} a^4 \pi.$$

ροπές: $M_{xy} = \frac{k a^5}{40}\pi$, $M_{yz} = \frac{(4\sqrt{2}-5)k}{30\sqrt{2}} \cdot a^5 = M_{xz}$.

$KB = \ldots$