ΜΑΘΗΜΑ 20ο Ανάλυση ΙΙ (12/05/09)

[ΙΙ] Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης (Διανυσματικά πεδία)
ΕΡΓΟ, ΡΟΗ, ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

• Έστω $\vec F=(P,Q,R): A(\subseteq \mathbb{R}^3)\to \mathbb{R}^3$ συνεχής συνάρτηση Γ $\vec r:[a,b]\to A$, C^1

Ορίζουμε:
$$\boxed{\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r =: \int_a^b \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt}$$

Αν $\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$

$$\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \big[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\big]\,dt$$

Συμβολικά: $\boxed{\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz}$

Τι δίνει το $\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r$;

- αν η $\vec F$ πεδίο δυνάμεων το $W=\int \vec F\cdot d\vec r$ είναι το έργο που παράγει η $\vec F$.
- αν $\vec F$ πεδίο ταχυτήτων (ή ρευστού ή ηλεκτρικό): Τότε $\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r$ δίνει την Ροή του $\vec F$ κατά μήκος της Γ (αρχή το $\vec r(a)$ και πέρας του $\vec r(b)$).
- Εάν η Γ είναι κλειστή καμπύλη ($\vec r(a)=\vec r(b)$) το $\oint_\Gamma \vec F\cdot d\vec r$, καλείται κυκλοφορία του $\vec F$ κατά μήκος της Γ.

Σχέση των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων.

Γ, λεία ($\vec r\,'(t)\neq \vec 0$, $t\in[a,b]$).

$$\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(\vec r(t))\, r'(t)\,dt = \int_a^b \left[\left(F(r(t))\cdot \frac{\vec r\,'(t)}{\|\vec r\,'(t)\|}\right)\right]\cdot \|r'(t)\|\,dt.$$

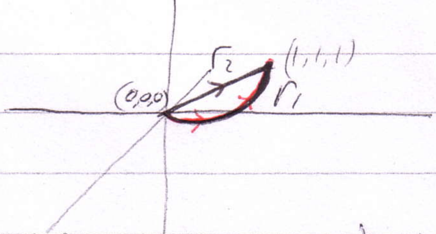
Εάν $\vec T(t)=\dfrac{\vec r\,'(t)}{\|\vec r\,'(t)\|}$

$$\boxed{\int_\Gamma \vec F\cdot d\vec r = \int_\Gamma (\vec F\cdot \vec T)\,ds.}$$

Ασκήσεις:

(1) $F(x,y,z)=(y-x^2,\ z-y^2,\ x-z^2)$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Έργο: i) Γ_1 $\vec r_1(t)=(t,t^2,t^3)$ $t\in[0,1]$.
ii) Γ_2 $[(0,0,0),(1,1,1)]$.



i) $W_1=\int_{\Gamma_1}\vec F\cdot d\vec r=\int_0^1 \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r_1\,'(t)\,dt=\int_0^1 (1,2t,3t^2)\cdot(0,\ t^3-t^4,\ t-t^6)\,dt$

$=\int_0^1 (2t^4-2t^5+3t^3-3t^8)\,dt = \left(\frac{29}{60}\right)$

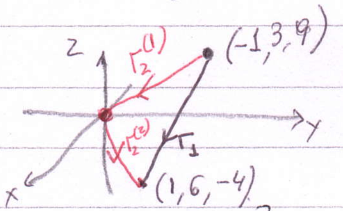
$\vec r_1\,'(t)=(1,2t,3t^2)$

$\vec F(\vec r_1(t))=\vec F(t,t^2,t^3)=(t^2-t^2,\ t^3-(t^2)^2,\ t-(t^3)^2)=$
$=(0,\ t^3-t^4,\ t-t^6)$

ii) $\Gamma_2: \quad \vec{r}_2(t) = (t,t,t)$, $t \in [0,1]$.

$\vec{F}(r_2(t)) = (t-t^2, t-t^2, t-t^2)$, $\vec{r}_2'(t) = (1,1,1)$.

Άρα $W_2 = \int_0^1 3(t-t^2)\,dt = \left[3\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. / $W_1 \neq W_2$.



(2). $\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Έργο κατά μήκος της i) $\Gamma_1 : [(-1,3,9), (1,6,-4)]$.
ii) $\Gamma_2 : [(-1,3,9)\ (0,0,0)] \cup [(0,0,0)\ (1,6,-4)]$.

i) Γ_1: $\vec{r}_1(t) = (-1,3,9) + t(2,3,-13) = (-1+2t, 3+3t, 9-13t)$, $t\in[0,1]$

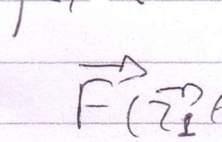
$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = \big((3+3t)(9-13t), (-1+2t)(9-13t), (-1+2t)(3+3t)\big)$.

$r_1'(t) = (2,3,-13)$. Άρα
$W_1 = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t)\,dt = \dots = 3$.

ii) $W_2 = \int_{\Gamma_2^{(1)}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2^{(2)}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\quad \Gamma_2^{(1)}$, $r_2^{(1)}(t) = (1-t)(-1,3,9)$. $t\in[0,1]$
$\Gamma_2^{(2)}$, $r_2^{(2)}(t) = t(1,6,-4)$, $t \in [0,1]$

$W_2 = \int_0^1 F(r_2(t)) \dots = 3$. / $W_1 = W_2$.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Σε ποιά πεδία δυνάμεων το έργο από δυο σημεία $A,B \in \mathbb{R}^3$ είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ της διαδρομής; (Θα τα μελετήσουμε με την βοήθεια των Θ. Green, Stokes)

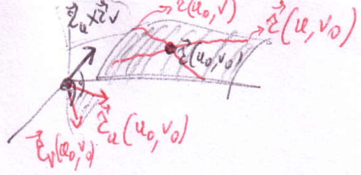


Υπενθύμιση: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ επιφάνεια: Το κάθετο $\vec{N}$ της S στο $(x_0,y_0,z_0) \in S$ είναι το $\perp \vec{r}'(t_0)$ για $\forall\, \vec{r}$ καμπύλη C^1 της S με $\vec{r}(t_0) = (x_0,y_0,z_0)$.

• $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ $\quad F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1, κάθετο της S στο $(x_0 y_0 z_0)$ το $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$.

• $S = \{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in D\}$ $\quad \vec{r}$, C^1 συνάρτηση

$(u_0,v_0) \in D$. Οι $\vec{r}(u,v_0)$, $\vec{r}(u_0,v)$ είναι καμπύλες πάνω στην S, με εφαπτόμενα διαν. $\vec{r}_u(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0,v_0)$
$\vec{r}_v(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0,v_0)$.



Τότε το $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0,v_0)$ είναι $\perp$ στα $\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$.

Άρα $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0,v_0) \perp S$ στο $\vec{r}(u_0,v_0)$.

Παράδειγμα:

S: καρτ. εξίσωση: $z = x^2 + y^2$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να ευρεθεί κάθετο στο $(1,1,2)$.

- $S = \{(x,y,z) : z - x^2 - y^2 = 0\}$, $\vec{N} = \nabla F(1,1,2) = (-2,-2,1)$. (Αν. εξ. της S)
- $S = \{(x,y,z)\ \ z = x^2 + y^2\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)_{(1,1)} = (-2,-2,1)$ (Καρ. εξ. της S)
- $S = \{\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ (Παρ. εξ. της S)

$$\begin{cases} \vec{r}_x(1,1) = (1,0,2) \\ \vec{r}_y(1,1) = (0,1,2) \end{cases} \quad \vec{r}(x,1) = (x, 1, x^2+1),\ \vec{r}(1,y) = (1, y, 1+y^2)$$

$$\vec{N} = (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)(1,1) = (-2,-2,1).$$

ή $S = \{\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2),\ \theta \in [0,2\pi],\ r \geq 0\}$, $\vec{r}(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1,1,2)$, $\vec{N} = (\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta)(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(-2,-2,1)$.

(B) Επιφανειακά ολοκληρώματα:

Ορισμοί:

1) Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Η S είναι C^1-επιφάνεια $\Leftrightarrow$ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ $\vec{r} : D (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$ C^1, D = u-απλό ή v-απλό, και $\{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\} = \vec{r}(D) = S$

2) Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ Η S είναι λεία $\Leftrightarrow$.

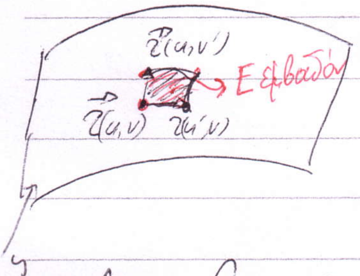
ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, D u-απλό (ή v-απλό), C^1, όπου $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v) \neq (0,0,0)$ $\forall (u,v) \in D$.

3) Απλή $\Leftrightarrow$ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(D) = S$, $\vec{r}$ "1-1".

Εμβαδόν Επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$. (C^1)

Επιφάνεια $S=\{\vec{r}(u,v)\ :\ (u,v)\in D\}$, ($\overset{D}{u}$-από v-από).

C^1, λεία.

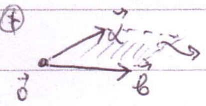


Το $E \overset{\oplus}{\cong} \|(\vec{r}(u',v)-\vec{r}(u,v)) \times (\vec{r}(u,v')-\vec{r}(u,v))\|$

$$= \left\| \frac{\vec{r}(u',v)-\vec{r}(u,v)}{u'-u} \times \frac{\vec{r}(u,v')-\vec{r}(u,v)}{v'-v} \right\| (u'-u)(v'-v).$$

Άρα το Εμβαδόν της Επιφάνειας ορίζεται (φυσιολογικά), ως:

$$A(S) =: \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|(u,v)\,du\,dv.$$

($\oplus$  Εμβαδόν $=\|\vec{\alpha}\times\vec{b}\|$)