ΜΑΘΗΜΑ 21º

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

• Παραμετρική Επιφάνεια $S \subseteq \mathbb{R}^3$ αν $\exists$ διπαραμέτρηση $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$: $D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, με $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\} = \vec{r}(D)$

• Η S λέγεται: απλή, αν είναι "1-1" (η $\vec{r}$ 1-1)
λεία, " " C^1, $\vec{N} \neq \vec{0}$
κανονική, " " απλή & λεία.

• Εφαπτόμενο Επίπεδο $\perp$ $(\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v)$

Παράδειγμα: Έστω ο κύλινδρος S με εξίσωση $x^2+y^2=a^2$ (με $0 \leq z \leq b$) που ορίζεται από $\vec{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow$ $\vec{N} = \vec{N}(\theta, z) = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_z$. Αλλά $\vec{r}_\theta(\theta,z) = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)$ και $\vec{r}_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$.

Συνεπώς $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$

Άρα $\vec{N} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$

• Εμβαδόν Παραμετρικής Επιφάνειας:

Αν $S = S(\vec{r})$ κανονική $\Rightarrow$ εμβαδόν $A(S) := \iint_D \|\vec{N}(u,v)\| du\,dv$ (όπου $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$) δηλαδή $A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du\,dv$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

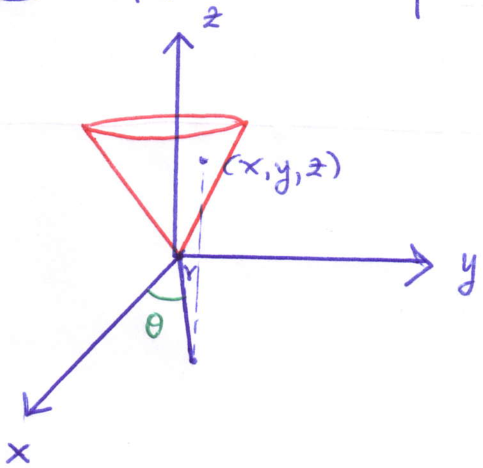
1. Εμβαδόν σφαίρας (επιφ.) $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$

• $\vec{r}(\theta,\varphi) = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi)$ με $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$.

Άρα $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ & \cdots & \\ & & \end{vmatrix} = -a\sin\varphi\,\vec{r} \Rightarrow \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| = \sqrt{a^4\sin^2\varphi} = a^2 \underset{\geq 0}{\sin\varphi}$

Άρα $A(S) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} a^2\sin\varphi\, d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-a^2\cos\varphi\right]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2\, d\theta = 4\pi a^2$

(2) Εμβαδόν Επιφάνειας Κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$



Κυλ. συν. :
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= \sqrt{x^2+y^2} = r \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &0\le r\le 1 \\ &\theta\in[0,2\pi] \end{aligned}$$

διπαραμέτρηση

Άρα $\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$

οπότε $\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$

$$= (-r\cos\theta)\vec{i} + (r\sin\theta)\vec{j} + \underbrace{(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)}_{r}\vec{k}$$

Επομένως $\|\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta\| = \sqrt{2}\cdot r$, οπότε $A(S) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2}\, r\, dr\right) d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\, d\theta = \pi\sqrt{2}\ .$$

◆

• Επιφανειακά Ολοκληρώματα.

(I) Αριθμητικό Επιφανειακό Ολοκλήρωμα. Μάζα, Ροπές Κ.Β κελύφων

Έστω $S(\vec{r})$ κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ ($\vec{r}: D(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$) και $f: S\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ συνεχής πραγμ. συν.

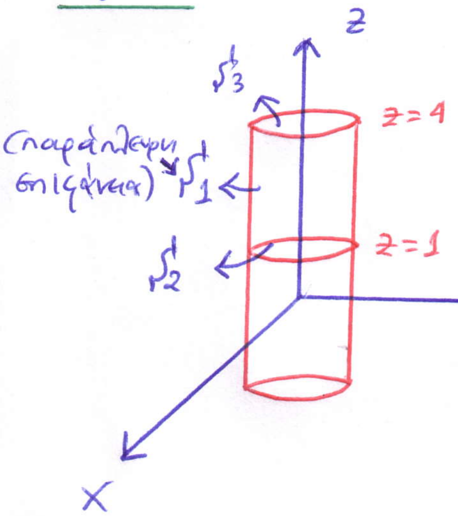
$$\Rightarrow \iint_S f\, dS := \iint_D f(\vec{r}(u,v))\, \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\, du\, dv$$

$$= \iint_D f(\vec{r})\, \vec{N}\, dA\ .$$

Αν S τμηματικά κανονική, τότε $\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} f\, dS_i$ ($S = \cup_{i=1}^{k} S_i$). Ανάλογα με εφαρμ. δίνει μάζα, ροπές και κέντρα μάζας ΚΜ (ή κέντρα βάρους ΚΒ) λεπτών κελύφων.

(B1) **Ασκήσεις:** (1) Έστω κύλινδρος $x^2+y^2=1$ με βάσεις τα επίπεδα $z=1$, $z=4$ και πυκνότητα μάζας $\delta = f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$. Να βρείτε τη μάζα του.

Λύση:



S_1: Κανονικό κάθετο $\vec{N} = (r\cos\theta, -r\sin\theta, 0)$

$\Rightarrow \|\vec{N}\| = r$ (γενικά)

- S_1 : $\vec{r}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, $(u,v) \in [0,2\pi]\times[1,4]$ $\Rightarrow$ $\vec{r}_u = (-\sin u, \cos u$, $\vec{r}_v = (0,0,1)$

$$I_1 = \iint_{S_1} f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_1^4 v\,dv\,du = 15\pi$$

στην S_1

$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\cos u, -\sin u, 0)$

$(\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = 1)$

- $S_3 \Rightarrow I_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2 r\,dr\,d\theta = 2\pi$

$(\delta(x,y,4) = 4(x^2+y^2) = 4r^2)$

- $S_2 \Rightarrow I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 1\cdot r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}$

$(\delta(x,y,1) = (x^2+y^2) = r^2)$

(Για I_1 έγινε η παραμετροποίηση $\vec{r}(\theta, z)$ με κυλινδρ. συντ.)

$\Rightarrow M = I_2 + I_3 + I_1) = (15+2+\frac{1}{2})\pi = \frac{35}{2}\pi$

(**Άσκηση**: Βιβλίο Thomas σελίδα 1073 Παράδειγμα 8)

- Ροπές και Μάζες λεπτών κελυφών

$$KM = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right) \text{ όπου}$$

$M_{yz} = \iint_S x\,\delta\,d\sigma$,

$M_{xz} = \iint_S y\,\delta\,d\sigma$,

$M_{xy} = \iint_S z\,\delta\,d\sigma$.

(II) Επιφανειακά Ολοκληρώματα Διανυσματικής Συν, Ροή

• Έστω $S(\vec{r})$ κανονική παραμετρική επιφάνεια και $\vec{F}=(P,Q,R)$ συνεχής διαν/κή συνάρτηση, τότε:

$$\iint_{S} \vec{F}\,d\vec{S} := \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv$$

$$= \iint_{D} \vec{F}(\vec{r})\cdot \vec{N}\,du\,dv$$

↓ (εσωτερικό γινόμενο)

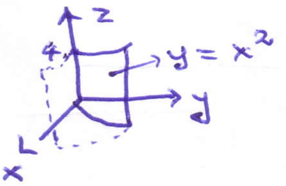
• Αν $\vec{F}$ πεδίο ταχυτήτων υγρού τότε: <u>ροή της</u> $\vec{F}$ διαμέσου της επιφ. S (στην κατεύθυνση του $\vec{N}$):

$$\boxed{\iint_{S} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma}$$ $\vec{n}$: μοναδιαίο κάθετο

$\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ · Σχέση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Άσκηση ① Να βρείτε τη ροή διαμέσου του παραβολικού κυλίνδρου $y=x^2$, $0\le x\le 1$, $0\le z\le 4$ για το πεδίο $\vec{F}=(yz,x,-z^2)$

ΛΥΣΗ



(Τα σημεία της επιφάνειας: $x=x,\ y=x^2,\ z=z$)

$$\vec{r}(x,z) = x\vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_z = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 2x\vec{i}-\vec{j}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^1\int_0^4 (x^2z, x, -z^2)\cdot(2x,-1,0)\,dz\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^4 (2x^3z - x)\,dz\,dx = 2$$

Άσκηση ② Ροή του πεδίου $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ διαμέσου σφαίρας κέντρ. $\vec{0}$ και ακτίνας $a>0$

ΛΥΣΗ

$\vec{N}=\vec{N}(\theta,\varphi) = -a\sin\varphi\,\vec{r}(\theta,\varphi)$ (Πρβλ. π.χ. σελ.129) $\Rightarrow$ Ροή $= \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} =$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a\sin\varphi\,\|\vec{r}(\theta,\varphi)\|^2\,d\varphi\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = -4a^3\pi$$ □