ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Καμπύλη : $\Gamma = \{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [\alpha, \beta]\}$

Εφαπτόμενο διάνυσμα στο $\vec{r}(t_0)$ το $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$

Μοναδιαίο εφ. διάνυσμα $\vec{T}(t_0) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}$

Μήκος καμπύλης : $\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|\vec{r}\,'(t)\| dt$

Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Επιφάνεια: $S = \{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D\}$

Κάθετο διάνυσμα στο $\vec{r}(u_0,v_0)$ το

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}$$

Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(u_0,v_0) = \dfrac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0,v_0)}{\|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u_0,v_0)\|}$.

Εμβαδόν επιφάνειας $A(S) = \iint_D \|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v)\| du\, dv$

$$\boxed{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}$$

Επικαμπύλιο ολ. της f στην Γ

$$\int_\Gamma f ds =: \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}\,'(t)\| dt$$

- $f = \delta =$ πυκνότητα, $M = \int_\Gamma f ds$ η μάζα του σύρματος Γ!

Επιφανειακό ολ. της f στην S

$$\iint_S f d\sigma =: \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v)\| du\, dv$$

$f = \delta =$ πυκνότητα, $M = \iint_S f d\sigma$ η μάζα του κελύφους S.

$$\boxed{\vec{F} = (P,Q,R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$$

Επικαμπύλιο ολ. της $\vec{F}$ στην Γ

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} =: \int_\alpha^\beta F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt$$

- $\vec{F} =$ πεδίο δυνάμεων, $W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ το έργο της $\vec{F}$
- $\vec{F} =$ πεδίο ταχυτήτων (μαγνητικό, ηλεκτρικό), $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ η ροή του $\vec{F}$ (κυκλοφορία, αν $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$) κατά μήκος της Γ.

Επιφανειακό ολ. της $\vec{F}$ στην S.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} =: \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot ((\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v)) du\, dv$$

- $\vec{F} =$ πεδίο ταχυτήτων (μαγνητικό, ηλεκτρικό) $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της S.

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Θ. Stokes / Green

- S προσανατολισμένη επιφάνεια, $\gamma(S)$ σύνορο της S (θετική φορά)

$$\int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}, \quad (\nabla \times \vec{F})(x,y) =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x,y)} \text{ (ο στροβιλισμός της } \vec{F})$$

- Ιδιαιτέρως : αν $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P,Q)$ $(\equiv (P,Q,0))$ (τότε $\vec{n} = \vec{k}$) $\int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$

Υποθέτουμε ότι ισχύουν "καλές" προϋποθέσεις για όλα.

ΜΑΘΗΜΑ 22ο

19/05/09

Ανάλυση ΙΙ

• Θεωρήματα Διαν. Ανάλυσης: Green, Stokes.

Ορισμοί:

1) Έστω $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό), $\vec{F}$ διαφορίσιμη (συνήθως είναι και C^1)

$\vec{F} = (P, Q, R)$

$(x_0, y_0, z_0) \in A$, $\nabla \times \vec{F}(x_0, y_0, z_0) := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} :=$

$$=: \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)} \vec{k}$$

Στροβιλισμός (ή περιστροφή) της $\vec{F}$ στο (x_0, y_0, z_0)

Συμβ. $\nabla \times \vec{F}$, $\mathrm{curl}\vec{F}$ ($\mathrm{rot}\vec{F}$).

2) Έστω $\vec{F} = (P, Q): B(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ (B ανοιχτό στον $\mathbb{R}^2$)

$$\nabla \times \vec{F}(x_0,y_0) = \mathrm{curl}\vec{F}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \vec{k}.$$

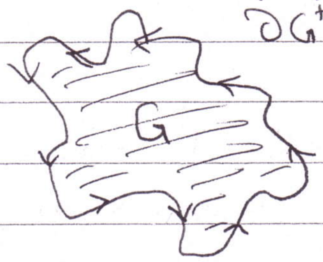
Στροβιλισμός της $\vec{F}$ στο (x_0, y_0).

3) Εάν $\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ $\forall \vec{x} \in (A \subseteq \mathbb{R}^3, B \subseteq \mathbb{R}^2)$

τότε λέμε ότι έχουμε πεδίο δυνάμεων μηδενικού στροβιλισμού ή ότι το πεδίο έχει στροβιλισμό μηδέν ή ότι είναι αστρόβιλο πεδίο.

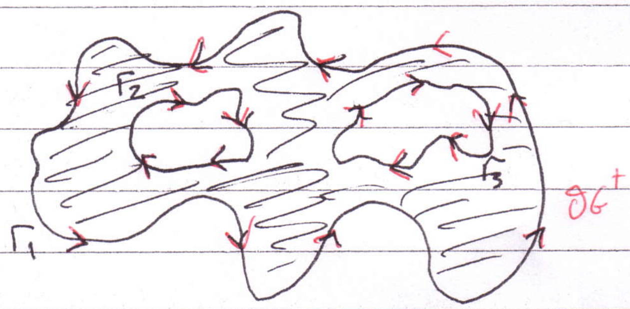
Ορισμοί

1) $G \subseteq \mathbb{R}^2$, απλό σύνολο Green, αν το G είναι φραγμένο, και το ∂G κατά τμήματα C^1, απλή, κλειστή καμπύλη.



2) $G \subseteq \mathbb{R}^2$, στοιχειώδες σύνολο Green, αν G φραγμένο, και το $\partial G = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$, Γ_k C^1 *, απλή, κλειστή καμπύλη, $k=1 \dots n$.

* κατά τμήματα.



Θεώρημα Green

$\vec{F} = (P, Q) : G \to \mathbb{R}^2$, G στοιχειώδες σύνολο Green

$\vec{F}$, C^1.

Τότε
$$\boxed{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,y)} dx\,dy = \int_{\partial G^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

∂G^+ -> θετικό προσανατολισμό.

ή

$$\iint_G (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial G} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Δηλαδή: η ροή του στροβιλισμού διαμέσου της "επιφάνειας" G ($\subseteq Oxy$) = κυκλοφορία του διανυσ. πεδίου κατά μήκος του συνόρου της G

$$\left[\ \int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)\ \right]$$ ~ Χρειάζεται για την απόδειξη του Θ. Green

όταν $\{a,b\}$ σύνορο κάποιου $G=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$!!

• Ασκήσεις

1) Επαληθεύσατε τον τύπο του Green για το $\vec F(x,y)=(x+y,y)$, $(x,y)\in G=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

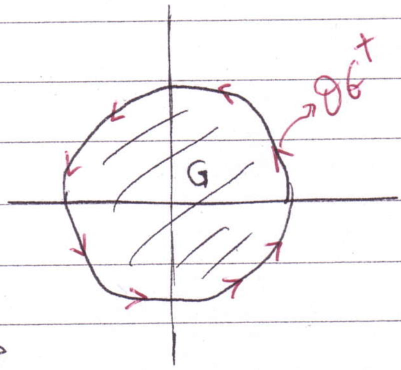
Τύπος Green: $$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial G^+}\vec F\cdot d\vec r \qquad (1)$$

$P(x,y)=x+y$

$Q(x,y)=y$

$\vec F=(P,Q)$

I = διπλό ολοκλήρωμα (αριστερά στην (1))



$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1$$

$$I=\iint_G(-1)\,dx\,dy=-\pi$$

σε πολικές → $\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}$ $I=\int_0^{2\pi}\int_0^1(-1)\,r\,dr\,d\theta=-\pi$

J = επικαμπύλιο ολοκληρ.

$$\partial G^+=\{\vec r(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)\ \ \theta\in[0,2\pi]\}$$

$$J=\int_0^{2\pi}F(\vec r(\theta))\cdot\vec r\,'(\theta)\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta,\sin\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)$$

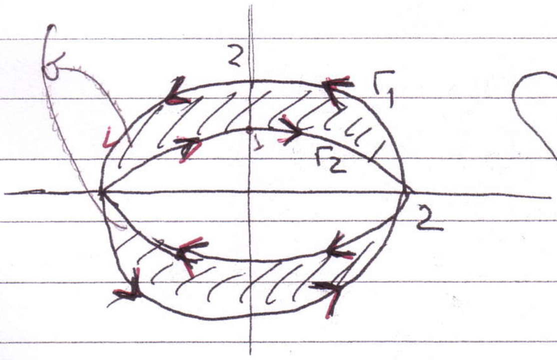
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^2\theta + \eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \eta\mu^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\, d\theta = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

$I = \int$ ⇝ άρα επαληθεύεται ο τύπος του Green

② Ομοίως: για $\vec{F}(x,y) = (4x-2y,\ 2x+6y)$

στο $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \ge 1 \right\}$.



$$I = \iint_G (2+2)\, dx\, dy = 4\, \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu(G)$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial G^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Άρα $I = 4(4\pi - \pi\cdot 2\cdot 1) = 8\pi$ ($E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} - E_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma}$)

$\Gamma_1 : \vec{r}(\theta) = (2\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2\eta\mu\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$

$-\Gamma_2 : \vec{p}(\theta) = (2\sigma\upsilon\nu\theta,\ \eta\mu\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$.

$$J = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}\,'(\theta)\,d\theta - \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta$$

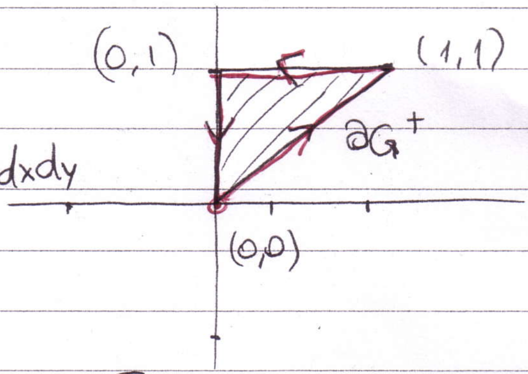
$$= \int_0^{2\pi} (8\,\text{συν}\theta - 4\,\text{ημ}\theta,\ 4\,\text{συν}\theta + 12\,\text{ημ}\theta)\cdot(-2\,\text{ημ}\theta,\ 2\,\text{συν}\theta)\,d\theta$$

$$- \int_0^{2\pi} (8\,\text{συν}\theta - 2\,\text{ημ}\theta,\ 4\,\text{συν}\theta + 6\,\text{ημ}\theta)\cdot(-2\,\text{ημ}\theta,\ \text{συν}\theta)\,d\theta = -8\pi$$

(3) Να βρεθεί το έργο $W = \int_{\partial G^+} (xy - x^2)\,dx + x^2y\,dy$

όπου G τρίγωνο με κορυφές $(0,0), (0,1), (1,1)$.

$\vec{F}(x,y) = (xy - x^2,\ x^2y)$.



$$W = \int_{\partial G^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

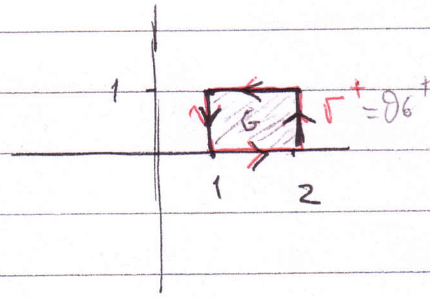
$$= \iint_G (2xy - x)\,dx\,dy \qquad G = \left\{(x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{array}\right\}$$

$$= \int_0^1\int_x^1 (2xy - x)\,dy\,dx = -\frac{1}{12}.$$

(4) Να υπολογιστεί η κυκλοφορία κατά μήκος της Γ:

$\int_\Gamma (x - xy)\,dx + (y^3 + 1)\,dy$, όπου Γ το σύνορο του ορθογωνίου $[1,2]\times[0,1]$.

$\vec{F}(x,y) = (x - xy \, , \, y^3 + 1)$

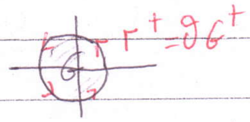


$$I = \iint_G (0 - (-x))\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^1 x\,dy \right] dx = \frac{3}{2}$$

(5) Κυκλοφορία $I = \int_\Gamma (x^3 + y^3)\,dx + (2y^3 - x^3)\,dy$

όπου $\Gamma : x^2 + y^2 = 1.$



$G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\vec{F}(x,y) = (x^3 + y^3, \, 2y^3 - x^3)$

$$I = \iint_G (-3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy = -3 \iint_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow I \xrightarrow[y = r\eta\mu\theta]{x = r\sigma\upsilon\nu\theta} -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = -\frac{3\pi}{2}.$$

(6) Έστω $f, g : G (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, C^2 (G σύνολο Green)

$\nabla^2 h = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ $\left(\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right.$ τελεστής Laplace$\left.\right)$

Τότε ν.δ.ο. $\iint_G f \nabla^2 g\,dx\,dy + \iint_G \nabla f \cdot \nabla g\,dx\,dy =$

$= \int_{\partial G^+} -f \dfrac{\partial g}{\partial y}\,dx + f \dfrac{\partial g}{\partial x}\,dy$ / Ταυτότητα Green.

$$\int_{\partial G^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Άρα $\displaystyle\int_{\partial G^+} -f\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + f\frac{\partial g}{\partial x}\,dy =$ $\left(P = -f\frac{\partial g}{\partial y},\ Q = f\frac{\partial g}{\partial x}\right)$

$$= \iint_G \Bigg[\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)}_{=\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)}_{=\frac{\partial P}{\partial y}}\Bigg] dx\,dy$$

$$= \iint_G \nabla f\cdot\nabla g\,dx\,dy + \iint_G f\,\nabla^2 g\,dx\,dy$$

• <u>Υπολογισμός εμβαδού με χρήση επικαμπύλιου ολοκληρώματος</u>

$\vec{F}(x,y) = (-y, x)$, $(x,y)\in G$. | $\vec{G}(x,y) = (-y,0)$, $\vec{H}(x,y) = (0,x)$

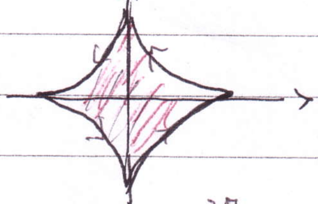
$E(G) = \int_{\partial G^+} -y\,dx = \int_{\partial G^+} x\,dy$

$$\iint_G (1-(-1))\,dx\,dy = \int_{\partial G^+} \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\Rightarrow E(G) = \frac{1}{2}\int_{\partial G^+} -y\,dx + x\,dy.$$

→ <u>Εφαρμογή</u>: Υπολογισμός εμβαδού του αστεροειδούς

$$G = \{(x,y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\}$$



$E(G)$

$\partial G : \vec{r}(t) = (\text{συν}^3 t, \text{ημ}^3 t)$ $t\in[0,2\pi]$ Άρα $E(G) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-\text{ημ}^3 t, \text{συν}^3 t)\cdot$

$\cdot(-3\,\text{συν}^2 t\,\text{ημ} t, 3\,\text{ημ}^2 t\,\text{συν} t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 t\,\text{συν}^2 t\,dt = \dots = \frac{3\pi}{8}$