ΜΑΘΗΜΑ 23ο

20/05/09

Ανάλυση ΙΙ

• **Θεώρημα Stokes**

- Ορισμοί:

Έστω $S=\{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in G\}$, G = απλό σύνολο Green (δηλ. ∂G είναι μια κατά τμήματα C^1, απλή κλειστή καμπύλη)

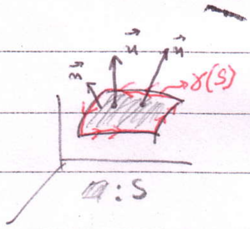
$\vec{r}$: 1-1, C^1, λεία $\begin{pmatrix}\vec{r}_u\times\vec{r}_v\,(u,v)\neq(0,0,0)\\ (u,v)\in G\end{pmatrix}$

S: Επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, απλή, C^1, λεία.

1) Το $\gamma(S) =: \vec{r}(\partial G)$ καλείται γεωμετρικό σύνορο της S.

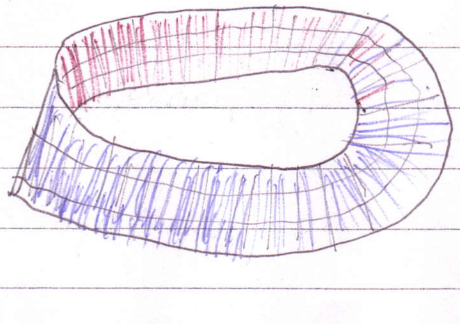
2) Το διαν. πεδίο των κανονικών μοναδιαίων καθέτων $\vec{n}(u,v)=\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}(u,v)$ δείχνει την θετική πλευρά της S

και λέμε ότι η $S(\vec{r})$ είναι προσανατολισμένη.



3) Η $\gamma(S)$ είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το $\{\vec{n}(u,v), (u,v)\in G\}$ αν κάποιος περπατάει πάνω στην $\gamma(S)$ και το κεφάλι του είναι στην κατεύθυνση του $\vec{n}$.

Σχόλια: 1) Μια λεία επιφάνεια μπορεί να μην έχει προσανατολισμό, πχ η ταινία του Möbius.



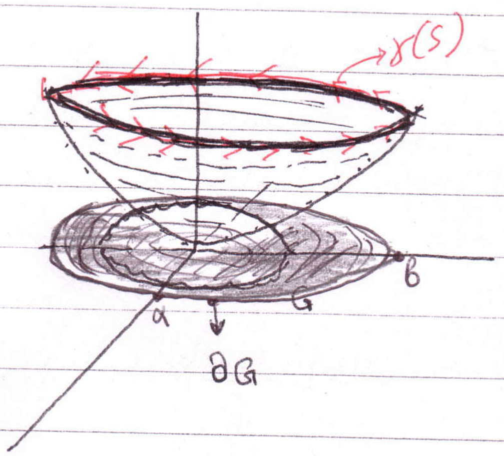
$$S=\Big\{\vec{r}(u,v)=\Big(\big(1+\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}u\big)\cos u,\ \big(1+\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}u\big)\sin u,\ \tfrac{1}{2}v\sin\tfrac{1}{2}u\Big),\ (u,v)\in[0,2\pi]\times[-1,+1]\Big\}$$

(Thomas, σελ. 1062 / Wikipedia: Möbius strip)

2) Ο αυστηρός ορισμός του προσανατολισμού του $\gamma(S)$ δεν μπορεί να δοθεί με τις γνώσεις που έχουμε.

· Παραδείγματα:

α) $S = \left\{ \vec{r}(u,v) = (u, v, u^2+v^2) : \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$ $(a, b > 0)$

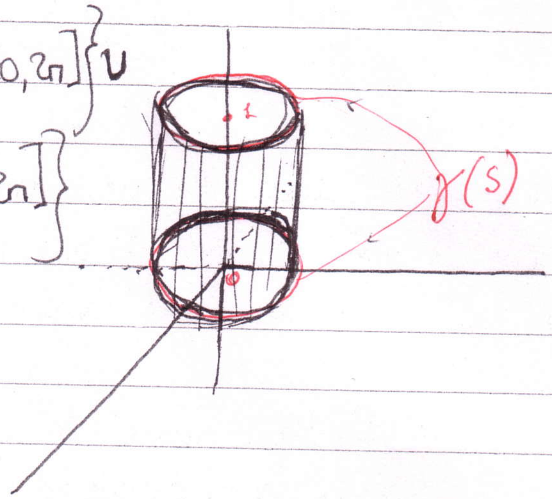


$\partial G = \left\{ (u,v) : \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1 \right\}$

$\gamma(S) = \{ \vec{r}(u,v) : (u,v) \in \partial G \}$

β) $S = \left\{ \vec{r}(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v) : (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0,1] \right\}$

$\gamma(S) = \{ (a\cos u, a\sin u, 0) : u \in [0, 2\pi] \} \cup$
$\cup \{ (a\cos u, a\sin u, 1) : u \in [0, 2\pi] \}$



· Θεώρημα Stokes:

Έστω $S = \{ \vec{r}(u,v) : (u,v) \in G \}$, απλή, C^1, λεία, προσανατολισμένη επιφάνεια και $\gamma(S)$ προσανατολισμένο

- και έστω $\vec{F} : D(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $S \subseteq D$

Τότε

$$\boxed{\begin{gathered}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \text{ή} \\ \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot \vec{T}\, d\sigma\end{gathered}}$$

Τύπος Stokes

όπου $\vec{n}$ μοναδ. $\perp$ στην S και $\vec{T}$ μοναδ. εφαπτ. στην $\gamma(S)$.

- "Η ροή του στροβιλισμού της $\vec{F}$ δια μέσου της επιφάνειας S ισούται με την κυκλοφορία της $\vec{F}$ κατά μήκος της $\gamma(S)$."

ή "Το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας ($\vec{n}$ = κάθετο) του στροβιλισμού της $\vec{F}$ ισούται με το ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας ($\vec{T}$ = εφ) στο $\gamma(S)$."

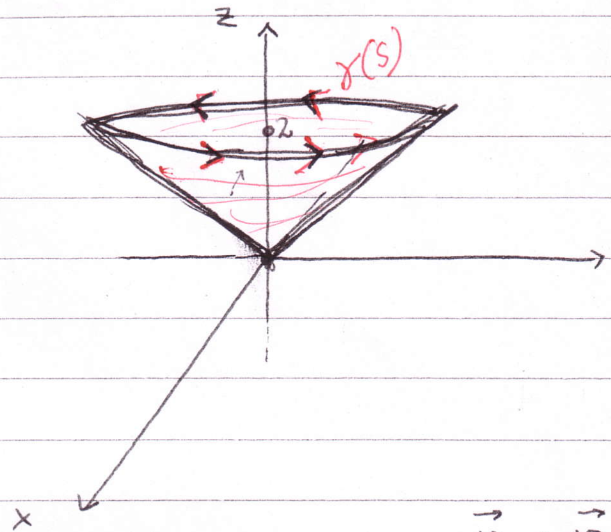
- Ασκήσεις

(1) Θεωρούμε επιφάνεια S, $S = \{ (x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2},\ z \in [0,2$ που βρίσκεται σε πεδίο δυνάμεων:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - y)\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2\vec{k}$$

Επαληθεύσατε τον τύπο του Stokes.

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



$$S=\left\{\vec{r}(r,\theta)=(r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta,\ r):\ :(r,\theta)\in\underbrace{[0,2]\times[0,2\pi]}_{\in G}\right\}$$

$$\vec{r}_r(r,\theta)=(\text{συν}\theta,\ \text{ημ}\theta,\ 1)$$
$$\vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\,\text{ημ}\theta,\ r\,\text{συν}\theta,\ 0)$$

$$\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\,\text{συν}\theta,\ -r\,\text{ημ}\theta,\ r)\neq(0,0,0),\quad r>0$$

$$\nabla\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & 4z & x^2\end{vmatrix}=(-4,\ -2x,\ +1)$$

$$I=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\iint_G(\nabla\times\vec{F})(\vec{r}(r,\theta))\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2(-4,\ -2r\,\text{συν}\theta,\ 1)\cdot(-r\,\text{συν}\theta,\ -r\,\text{ημ}\theta,\ r)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\,\text{συν}\theta+2r^2\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta+r)\,dr\,d\theta=\ldots=4\pi.$$

$$J=\int_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r},\quad \gamma(S)=\{\underbrace{(2\,\text{συν}\theta,\ 2\,\text{ημ}\theta,\ 2)}_{\vec{\rho}(\theta)},\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\varrho}(\theta))\cdot\vec{\varrho}\,'(\theta)\,d\theta.$$

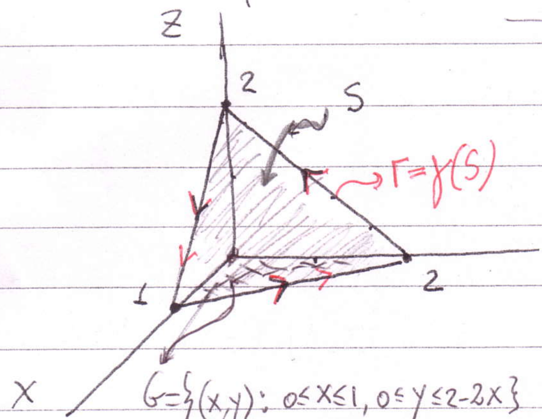
$$= \int_0^{2\pi} (4συν^2\theta - 2ημ\theta,\ 8,\ 4συν\theta)\cdot(-2ημ\theta,\ 2συν\theta,\ 0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8ημ\theta\, συν^2\theta + 4ημ^2\theta + 16συν\theta)\,d\theta =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} ημ^2\theta\, d\theta = 4\pi.$$ Άρα $I = \mathcal{J}$.

(2) Να υπολογιστεί η κυκλοφορία του πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (xy,\ x,\ 3+z)$ κατά μήκος της $Γ$

$Γ$: σύνορο της $2x+y+z=2$, $x,y,z \geq 0$.



κυκλοφορία $K = \int_Γ \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{Θ.\ Stokes}{=}$

$$= \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

$$S = \{(x,\ y,\ 2-2x-y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x\}$$

$$(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)(x,y) \overset{\circledast}{=} (2,1,1)$$ (Το κάθετο διαν.* στο επίπεδο $2x+y+z=2$ είναι το $(2,1,1)$)

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z) = (0,\ x-3z,\ y)$$

$$\mathcal{J} = \int_0^1\int_0^{2-2x} (0,\ x-3(2-2x-y),\ y)\cdot$$

$$\cdot(2,1,1)\,dy\,dx$$

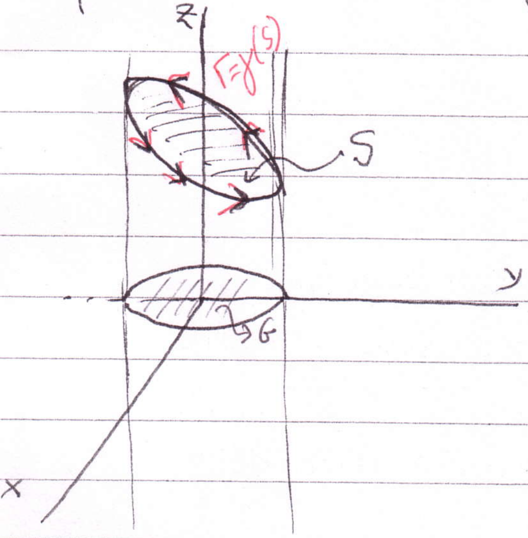
(*) Δεν χρειάζεται να βρούμε τα $\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_x\times\vec{r}_y$, αφού ξέρουμε ότι το $\perp$ στο $Ax+By+Γz=C$ είναι το $(A,B,Γ)$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x+4y-6)\,dy\,dx = -1 .$$

(3) Να βρεθεί η κυκλοφορία του πεδίου ταχυτήτων

$$\vec{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$$

διαμέσου της Γ : τομή $x^2+y^2=1$ (κυλινδρική επιφάνεια), $x+y+z=1$.



$$S = \left\{ (x,y,z) : \begin{matrix} x^2+y^2 \le 1 \\ x+y+z=1 \end{matrix} \right\}$$

$$K = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (0,0,3x^2+3y^2)$$

$$S = \left\{ \vec{r}(x,y) = (x,y,1-x-y) : x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

$$(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)(x,y) \overset{(+)}{=} (1,1,1)$$ (Το κάθετο διαν. στο επίπεδο $x+y+z=1$ είναι το $(1,1,1)$), $G = \{ (x,y) : x^2+y^2 \le 1 \}$ $= \{ (r\,\text{συν}\theta, r\,\text{ημ}\theta) : 0 \le r \le 1 ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$

$$K = \iint_G (0,0,3x^2+y^2)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy =$$

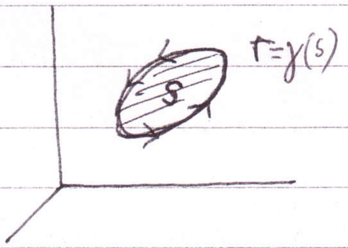
$$= 3\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy \;\xrightarrow[y = r\,\text{ημ}\theta]{x = r\,\text{συν}\theta}\; = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow K = \frac{3\pi}{2}$$

SKAG

4) Έστω πεδίο $\vec{F}(x,y,z) = (yz+1, xz, xy)$

Έργο δύναμης που κινεί το σημείο εφαρμογής της πάνω στην Γ, τυχαία έλλειψη στον $\mathbb{R}^3$.



$$W = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz+1 & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x, y-y, z-z$$

* Σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη το έργο αυτής της δύναμης θα'ταν 0!

δηλ. $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (0,0,0)$.

Άρα $W = \int_{\gamma(S)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = 0$.

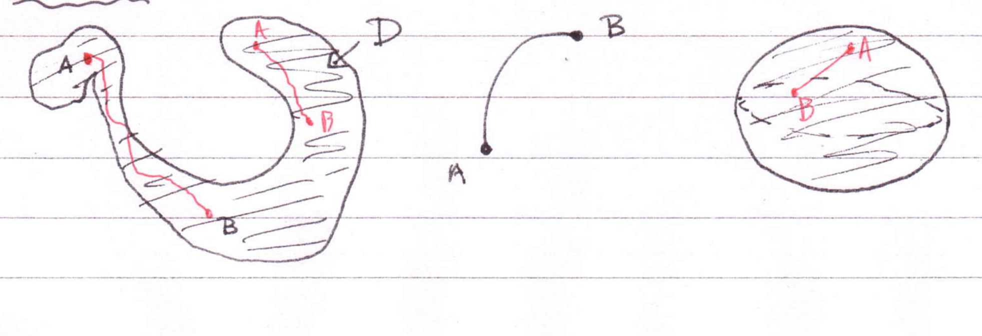
• Συντηρητικά, Αστρόβιλα διαν. πεδία, Σχέση αυτών

- Ορισμοί: Συνεκτικά, Απλά Συνεκτικά σύνολα του $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

1) $D \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

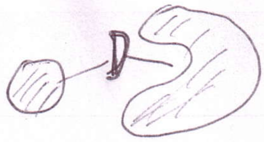
Το D ονομάζεται συνεκτικό σύνολο $\Leftrightarrow$ $\forall$ ζεύγος σημείων $A, B \in D$ υπάρχει κατά τμήματα C^1 καμπύλη $\Gamma \subseteq D$ με άκρα τα A, B.

π.χ

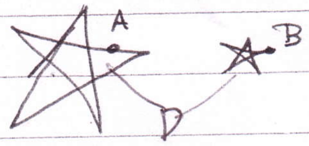


Συνεκτικά

συνεκτικά

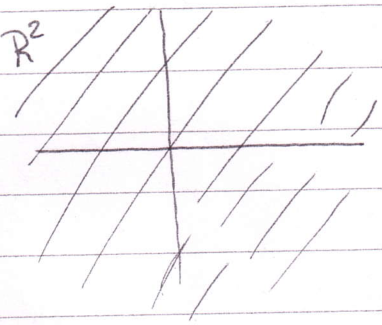


μη συνεκτικό

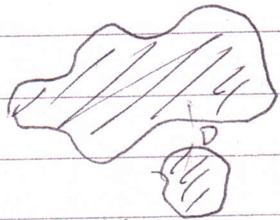


2) $D \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, απλά συνεκτικό $\Leftrightarrow$ κάθε απλή κλειστή καμπύλη $\Gamma \subseteq D$ μπορεί με συνεχή τρόπο να συρρικνωθεί σ'ένα σημείο του D.

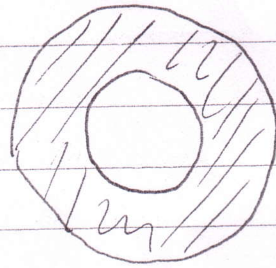
i) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό $\Leftrightarrow \forall \, \Gamma$ απλή, κλειστή καμπύλη $\Gamma \subseteq D$ έχουμε ότι το εσωτερικό της Γ είναι υποσύνολο του D.



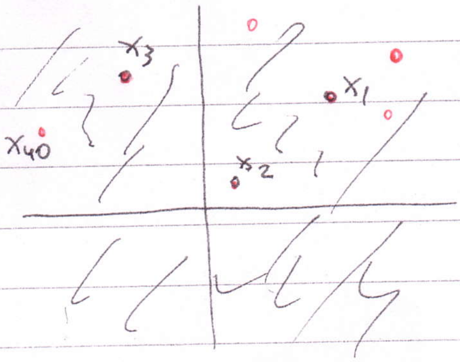
απλά συνεκτικό
και συνεκτικό



απλά συνεκτικό
όχι όμως και
συνεκτικό



συνεκτικό
αλλά όχι
απλά συνεκτικό



$\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$

όχι απλά συνεκτικό
συνεκτικό.

όχι συνεκτικό
όχι απλά συνεκτικό