24ο ΜΑΘΗΜΑ

26/05/09

Ανάλυση ΙΙ

• Συνεκτικά, Απλά συνεκτικά σύνολα στον $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

1) $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D απλά συνεκτικό $\Leftrightarrow$ $\forall$ καμπύλη Γ, απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1, έχουμε ότι το εσωτ.$\Gamma \subseteq D$.

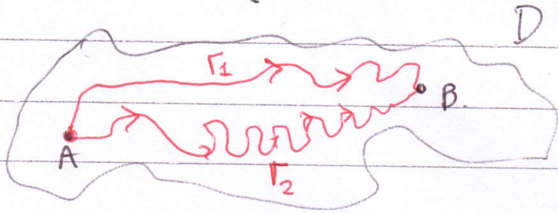
2) $D \subseteq \mathbb{R}^3$, D απλά συνεκτικό $\Leftrightarrow$ $\forall$ καμπύλη $\Gamma \subseteq D$, απλή, κλειστή, κατά τμήματα C^1, $\exists$ επιφάνεια $S \subseteq D$ η οποία είναι απλή, C^1(λεία), τέτοια ώστε Γ = γεωμετρικό σύνορο της S. ($S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in G\}$, G = απλό σύνολο (Green)) (*)

• Ανεξαρτησία του έργου από την διαδρομή / Συντηρητικά πεδία

→ Ορισμός: $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ (αντίστοιχα αν $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ή $D \subseteq \mathbb{R}^3$)

$\vec{F} = (P, Q, R)$. Εάν για κάθε ζεύγος σημείων $A, B \in D$ και για κάθε ζεύγος Γ_1, Γ_2 καμπυλών του D (κατά τμήματα C^1), με αρχή το A και πέρας το B έχουμε ότι:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} d\vec{r}$$

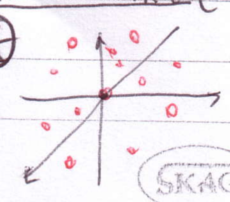


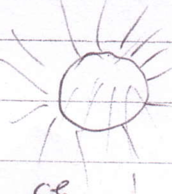
τότε λέμε ότι το έργο της $\vec{F}$ στο D είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Το διανυσ. πεδίο $\vec{F}$ καλείται συντηρητικό πεδίο δυνάμεων

Απ. Συνεκτικά (συνεκτικά)

(*) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$



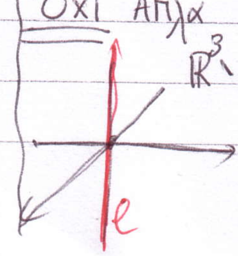


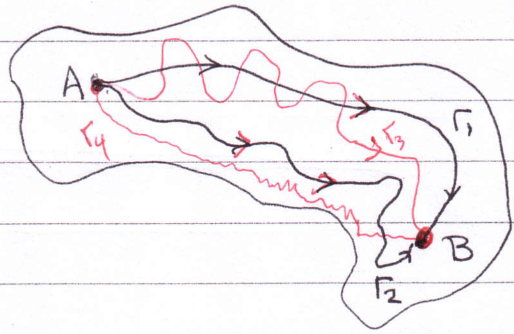
SKAG

Εξ. σφαίρας
εσ. σφαίρας.

Όχι Απλά Συνεκτικά (συνεκτικά)

$\mathbb{R}^3 \setminus \ell$





Την $\boxed{\text{κοινή}}$ τιμή του έργου από το A στο B συμβολίζουμε με

$$\boxed{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

• <u>Θεμελιώδες θεώρημα επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων</u>

$\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3\ (\mathbb{R}^2)$, συνεχής, D ανοικτός και συνεκτικός

ΤΕΕΙ:

1) $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

2) $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall\, \Gamma \subseteq D$, Γ κλειστή, κ.τ. C^1.

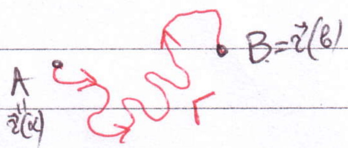
3) $\exists\ f: D \to \mathbb{R}$ με $\vec{F} = \nabla f$, δηλ. $P = f_x$, $Q = f_y$, $R = f_z$.

Απόδειξη i) $\Leftrightarrow$ ii) είναι προφανής
" i) $\Rightarrow$ iii) δύσκολη
" iii) $\Rightarrow$ i) θα είναι:

$\vec{F} = \nabla f$

A, B ∈ D, Γ κατά τμήματα C', $\vec{r}: [a,b] \to D$ με

$\vec{r}(a) = A$, $\vec{r}(b) = B$



$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$ (→ κανόνας της αλυσίδας)

$$\Rightarrow \int_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}(f\circ\vec{r})(t)\,dt \overset{\text{ΘΘΑΛ}}{=\!=} f\circ\vec{r}(b) - f\circ\vec{r}(a) = f(B) - f(A)$$

• **Προσοχή**: $\vec{F}$ συντηρητικό $\Rightarrow \vec{F} = \nabla f$ και

$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$, Γ $\vec{r} : [a,b] \to D$, $\vec{r}(a) = A$, $\vec{r}(b) = B$.

Η $\varphi = -f$ καλείται συνάρτηση δυναμικού της $\vec{F}$.

→ Ερωτήματα:

I) Πώς θα "δούμε" αν ένα πεδίο είναι συντηρητικό;

II) Πώς θα βρούμε την συνάρτηση δυναμικού;

III) Ποια η σχέση μεταξύ συντηρητικού και αστρόβιλου δ.π.;

• Θεώρημα: Θεωρούμε $F : D\,(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, C^1, D ανοιχτό συνεκτικό.

Τότε: i) $\vec{F}$ συντηρητικό $\Rightarrow$ $\vec{F}$ αστρόβιλο ($\not\Leftarrow$)

Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει (γενικά).

ii) Αν D = απλά συνεκτικό τότε ισχύει και το αντίστροφο:

$\vec{F}$ συντηρ. $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ αστρόβιλο.

***

(Αποδ −γ μοδ) : i) $\vec{F}$ = συντηρ $\Rightarrow \vec{F} = (P,Q,R) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\}$$ Αυτές οι 2 είναι ίσες (από Θεωρ. Clairaut) (μεικτών παραγώγων)

Ανάλογα $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

Άρα $\operatorname{curl} \vec{F}(x_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{(\vec{x}_0)} = (0,0,0)$.

ii) D = απλά συνεκτικό $\Leftarrow \mathbb{R}^2$, $\oint_\Gamma \vec{F} d\vec{r} \underset{\text{Green}}{\overset{\text{Θεωρ}}{=}} \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$ / εσΓ$=G \subseteq D$ απλά συν.

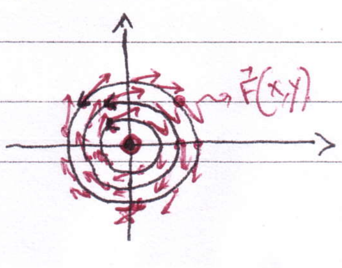
στον $\mathbb{R}^3$: Γ, S / $\gamma(S) = \Gamma$, S απλά συνεκτική, S επιφάνεια $\Gamma = \gamma(S)$
κλειστή, απλή

$\oint_\Gamma \vec{F} d\vec{r} \underset{\text{Stokes}}{\overset{\text{Θεωρ}}{=}} \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$: Τελικά αστρόβιλο $\Rightarrow$ συντηρητικό

Παράδειγμα: ΑΣΤΡΟΒΙΛΟΥ ΠΔ που ΔΕΝ είναι συντηρητικό

$\vec{F} = (P,Q) : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, D = συνεκτικό, ΟΧΙ απλά συνεκτικό.

$D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.



$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) - 2x(-x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Άρα $\operatorname{curl}\vec{F}(x,y) = \nabla\vec{F}(x,y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x,y)} \vec{k} = \vec{0}$

Δηλ. το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο στο $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Έστω $\Gamma = \{ \vec{r}(t) = (\alpha\,\text{συν}t, \alpha\,\text{ημ}t),\ t\in[0,2\pi] \}$ $(\alpha>0)$

κλειστή καμπύλη στο D.

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cancel{\alpha\,\text{συν}t}\ \alpha\,\text{ημ}t}{\alpha^2\text{συν}^2t + \alpha^2\text{ημ}^2t}, \frac{-\alpha\,\text{συν}t}{\alpha^2\text{συν}^2t + \alpha^2\text{ημ}^2t} \right)\cdot(-\alpha\,\text{ημ}t, \alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1)\,dt = -2\pi \neq 0 \rightsquigarrow$$ το $\vec{F}$ ΔΕΝ είναι συντηρ.

• Σημείωση: $\vec{F} = \nabla f = \nabla g$, $D =$ ανοικτό + συνεκτικό

τότε $f = g + C$ (για κάποιο $C\in\mathbb{R}$).

(βλ. Ασκήσεις 5+6 Φυλλάδιο 2)

Ασκήσεις:

(1) Θεωρούμε την $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\text{συν}y+yz,\ xz-e^x\text{ημ}y,\ xy+z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Ελέγξτε αν είναι συντηρητικό και αν ναι να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

ΛΥΣΗ Το $\mathbb{R}^3$ είναι συν + απλά συν. άρα

$$\vec{F}=\text{συντηρ.} \Leftrightarrow \vec{F}=\text{αστροβ.}$$

$$P(x,y,z)=e^x\text{συν}y+yz$$

$$Q(x,y,z)=xz-e^x\text{ημ}y$$

$$R(x,y,z)=xy+z.$$

$$\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{matrix}\right|_{(x,y,z)}=(0,0,0)$$

Άρα το $\vec{F}$ που είναι αστρόβιλο είναι και συντηρητικό.

Ζητάμε $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:\nabla f=\vec{F}$ δηλ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\text{συν}y+yz \overset{\text{ολ.}}{\underset{x}{\Rightarrow}} f(x,y,z)=e^x\text{συν}y+xyz+h_1(y,z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xz-e^x\text{ημ}y \overset{\text{ολ.}}{\underset{y}{\Rightarrow}} f(x,y,z)=xyz+e^x\text{συν}y+h_2(x,z)$$

$\Big\}\overset{(*)}{\Rightarrow}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+z \quad (3)$$

Άρα $\overset{(*)}{\Rightarrow} h_1(y,z) = h_2(x,z) = h(z)$.

Επομένως: $f(x,y,z) = xyz + e^x \sigma\upsilon\nu y + h(z)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + h'(z) \\ \\ (3)\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + z \end{array}\right\} \Rightarrow h'(z) = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + c$$

Τελικά $f(x,y,z) = xyz + e^x \sigma\upsilon\nu y + \dfrac{z^2}{2} + C$.

(2) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (y, x, 4)$. Νδο είναι συντηρητικό και υπολογίστε το

$$I = \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

ΛΥΣΗ: $\text{curl}\,\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 4 \end{vmatrix}_{(x,y,z)} = (0,0,0)$

το $\vec{F}$ αστρόβιλο στο $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\vec{F}$ είναι και συντηρητικό.
(συνεκτικό + απλά συνεκτικό)

Βρίσκουμε $f(x,y,z) = xy + 4z + C$. Άρα

$$I = \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(2,3,-1) - f(1,1,1)$$

$$= (6-4) - 5 = -3.$$

3. $\int_\Gamma 2x\,συν y\,dx - x^2 ημ y\,dy$.

$\Gamma =$ i) $y=(x-1)^2$ από $(1,0)\to(0,1)$

ii) ευθυγρ. τμήμα που ενώνει τα $(-1,\pi)\to(1,0)$

iii) » » » $(-1,0)\to(1,0)$

iv) Αστεροειδής $\vec{r}(t)=(συν^3 t, ημ^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$.

ΛΥΣΗ $\vec{F}(x,y)=(2x\,συν y - x^2 ημ y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ = συν + απλά συνεκτικό

Το πεδίο είναι αστρόβιλο και επομένως συντηρητικό

$f(x,y)=x^2 συν y + C$, $\vec{F}=\nabla f$.

i) $I_1 = f(0,1)-f(1,0) = -1$.

ii) $I_2 = f(1,0)-f(-1,\pi) = 2$

iii) $I_3 = f(1,0)-f(0,-1) = -1$

iv) $I_4 = 0$ διότι η καμπύλη είναι κλειστή.