# 25ο ΜΑΘΗΜΑ

30-5-2009

**Απαντήσεις** (συνέχεια...)

4) $\vec{F}(\vec{r}) = -Mmg \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$, $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

- Να αποδείξετε ότι αυτό το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό
- Να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού φ
- $\nabla^2 \phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ (δηλ. η φ είναι αρμονική)

Ζητάμε $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, με $\nabla g = \vec{F}$ (αν υπάρχει τότε είναι συντηρητικό)

I) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -Mmg \cdot \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow g(x,y,z) =$
$= -Mmg \cdot (x^2+y^2+z^2)^{(-\frac{3}{2}+1)} \dfrac{1}{(-\frac{3}{2}+1)} \cdot \dfrac{1}{2} + h_1$

II) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -Mmg \cdot \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow g(x,y,z) =$
$= -Mmg \cdot (x^2+y^2+z^2)^{(-\frac{3}{2}+1)} \dfrac{1}{(-\frac{3}{2}+1)} \cdot \dfrac{1}{2} + h_2(x,z)$

III) $\dfrac{\partial g}{\partial z} = -Mmg \cdot \dfrac{z}{(x^2+x^2+z^2)^{3/2}}$
$\Rightarrow g(x,y,z) = -Mmg (x^2+y^2+z^2)^{(-\frac{3}{2}+1)} \dfrac{1}{(-\frac{3}{2}+1)} \dfrac{1}{2} + h_3(x,y)$

Από (I)(II) και (III) προκύπτει ότι: $h_3(x,y) = h_1(y,z) = h_2(x,z) = C$ (σταθερά)

Επομένως δίνεται: $g(x,y,z) = -Mmg \cdot (x^2+y^2+z^2)^{(-\frac{3}{2}+1)} \dfrac{1}{(-\frac{3}{2}+1)} \cdot \dfrac{1}{2} +$

Την οποία βάζοντας $\vec{r} = (x,y,z)$ προκύπτει:

$$g(\vec{r}) = Mmg \frac{1}{\|\vec{r}\|} + C_0$$

και άρα έχουμε $\varphi(\vec{r}) = -\dfrac{Mmg}{\|\vec{r}\|}$, $\vec{r} \neq \vec{0}$ (συνήθως βάζουμε $c_0 = 0$)

(5) $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = C^1$ και $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ (αστρόβιλο πεδίο)

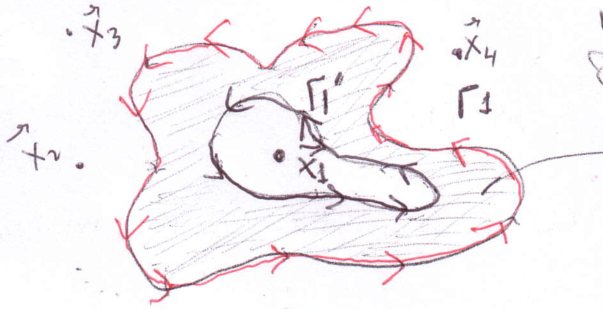
Εστω $\Gamma_i$ καμπύλη απλή, κλειστή και κατά τμήματα $C^1$

$\Gamma_i \subseteq D$ $x_i \in \varepsilon\sigma\Gamma_i$, $\vec{x}_j \notin \varepsilon\sigma\Gamma_i$ αν $j \neq i$

Τοτε $\exists\, c_i \in \mathbb{R}$ : $\int_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = c_i$, $i = 1, \dots, n$ (Για τυχαία $\Gamma_i$ με αυτές τις ιδιότητες)

---

Εστω $\vec{x}_1$ και $\Gamma_1$ τυχαία καμπύλη, $\Gamma_1 \subseteq D$, $\vec{x}_1 \in \varepsilon\sigma\Gamma_1$




και $\Gamma_1'$ μια παρόμοια ιδιότητες και $\Gamma_1' \subseteq \varepsilon\sigma\Gamma_1$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο χώρο αυτό το θεώρημα Green αφού δεν περιλαμβάνεται το $x_1$

($G = \varepsilon\sigma\Gamma_1 \cap \varepsilon\xi\Gamma_1'$, $x_1 \notin G$ = σύνολο Green)

Εχουμε $\iint_G (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{r} = 0 \overset{\theta.}{\underset{Green}{\Longrightarrow}} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_1'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Επομένως τα δύο οδοκληρώματα είναι ίσα

και έτσι σημαίνει ότι είναι: για τυχαία $\Gamma_1$ με $\vec{x}_1 \notin \Gamma_1$, $\vec{x}_1 \in \varepsilon\sigma\Gamma_1$ και $\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \notin \varepsilon\sigma\Gamma_1$ $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = c_1$.

(6) <u>Εφαρμογη</u> * *

* $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Πεδίο "σπιν".

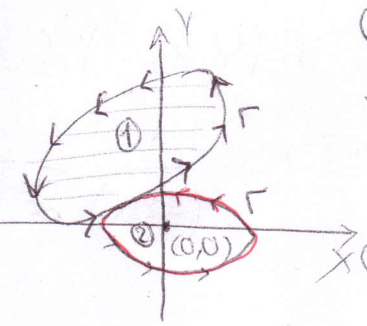
Να υπολογιστεί το έργο κατά μήκος μιας καμπύλης Γ

$\left( W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$ όπου Γ τυχαία έλλειψη που δεν περιέχει το (

---

Το πεδίο είναι αστρόβιλο δηλαδή $\nabla \times \vec{F}(x, y) = (0, 0, 0)$

(το έχουμε αποδείξει σε προηγούμενη άσκηση)



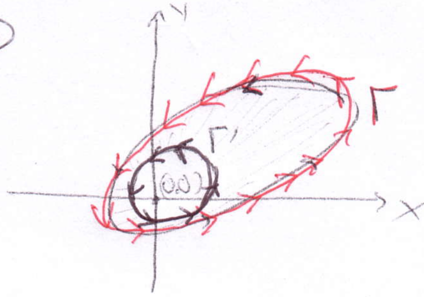

① <u>1η περίπτωση</u> (το (0,0) $\notin$ εσΓ)

Τοτε $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \underset{Green}{=} \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0$

② <u>2η περίπτωση</u> (το (0,0) $\in$ εσΓ)

$\longrightarrow$

(153)




F' $\Gamma'(t) = (\alpha\,\sigma\upsilon\nu t, \alpha\,\eta\mu t)$ $t \in [0,2\pi]$

$\varepsilon\sigma\Gamma' \subseteq \varepsilon\sigma\Gamma$

Τότε $\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0 =$

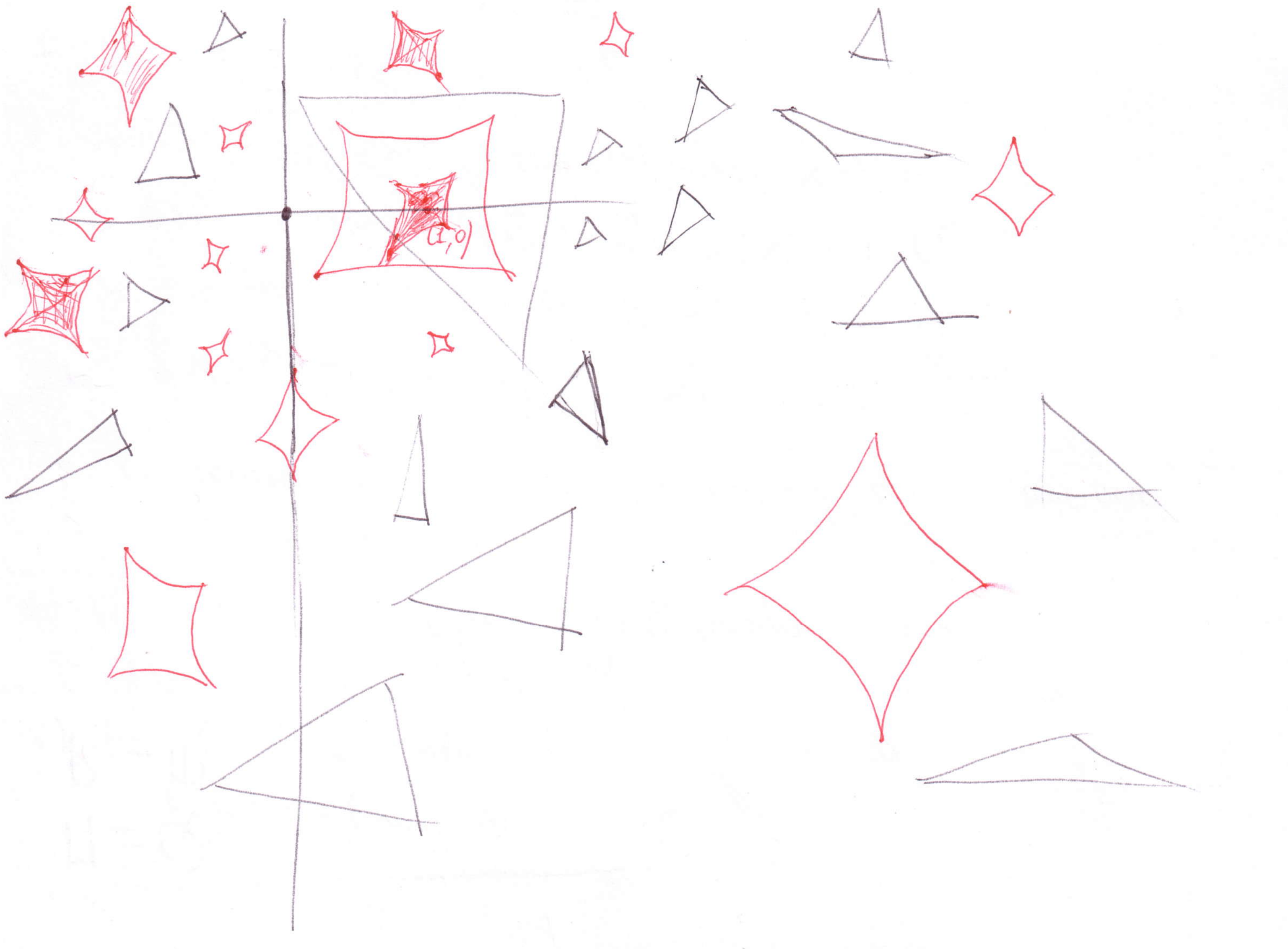
(απο Θεωρ. Green) $= \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma'} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Όμως, $\int_{\Gamma'} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2\pi$ (το έχουμε αποδείξει). Άρα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2\pi$

(7) Να υπολογισθεί το έργο κατά μήκος της Γ δηλαδή

$\int_\Gamma \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}dx - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dy$ όπου i) Γ τυχαίο αστεροειδές που δεν περιέχει το (1,0)

ii) Γ περίμετρο τυχαίου τριγώνου που δεν >>>



Συμπληρωματικά



# Τοπικά Ακρότατα

Έστω $f: U(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $\vec{x}_0 \in U$.

i) Το $\vec{x}_0$ ονομάζεται σημείο τοπικού μεγίστου της $f$ $\Leftrightarrow$ αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ώ. $f(\vec{x}) \le f(\vec{x}_0)$ για κάθε $\vec{x}\in U$ με $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$ (δηλ. $\vec{x}\in S(\vec{x}_0,\delta)$ = σφαίρα κέντρου $\vec{x}_0$, ακτίνας $\delta$)

ii) Το $\vec{x}_0$ ονομάζεται σημείο τοπικού ελαχίστου της $f$ $\Leftrightarrow$ αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ώ. $f(\vec{x}_0)\le f(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x}\in U$ με $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$. (δηλ. » »)

• Εάν το $\vec{x}_0 \in U$ είναι σ.τ.μ. ή σ.τ.ε., τότε το $\vec{x}_0$ αναφέρεται ως τοπικό ακρότατο.

i') Το $\vec{x}_0$ ονομάζεται σημείο ολικού μεγίστου της $f$ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{x})\le f(\vec{x}_0)$ για κάθε $\vec{x}\in U$.

ii') Το $\vec{x}_0$ ονομάζεται σημείο ολικού ελαχίστου της $f$ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{x}_0)\le f(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x}\in U$.

. Εάν το $\vec{x}_0\in U$ είναι σ.ο.μ. ή σ.ο.ε., τότε το $\vec{x}_0$ αναφέρεται ως ολικό ακρότατο

Για σχήματα: Διάλεξη Π. Μπουμπούλη, Έγγραφα, Ηλ. Τάξη +Thomas ⌋

## Μελέτη ακροτάτων για $C^2$ συναρτήσεις, $f: U(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, $U$ = ανοικτό σύνολο.

Αρχή του Fermat: Εάν το $(x_0,y_0)=\vec{x}_0 \in U$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, τότε $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$

(Το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ. $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$, $x_0=0$, $f'(x_0)=0$, $x_0$ δεν είναι τ.α.

$g(x,y)=x^3$, $\nabla g(0,y)=(0,0)$ $\forall y$, $(0,y)$ δεν είναι τ.α.

Απόδ. • $\vec{x}_0$ τοπικό μέγιστο. Ορίζουμε $g(t)=f(\vec{x}_0+t\vec{e}_1)$, $(t\in(-\delta,+\delta))$. Τότε $g(0)=f(\vec{x}_0)\ge f(\vec{x}_0+t\vec{e}_1)=g(t)$, $t\in(-\delta,+\delta)$
$\Rightarrow$ το $0$ τοπικό μέγιστο για την $g:(-\delta,+\delta)\to\mathbb{R}$. Άρα (αρχή Fermat) $g'(0)=0$ δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$. Όμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ ⌋

Κρίσιμο σημείο: Εάν για το $\vec{y}_0\in U$ ισχύει $\nabla f(\vec{y}_0)=(0,0)$ τότε το $\vec{y}_0$ καλείται κρίσιμο σημείο της $f$

→ Από την Αρχή του Fermat τα τοπικά ακρότατα της $f$ εντοπίζονται μεταξύ των κρίσιμων σημείων της $f$.

<u>Σαγματικό σημείο</u> Έστω $\vec{x}_0 \in U$ <u>κρίσιμο</u> σημείο της $f$. Το $\vec{x}_0$ ονομάζεται σαγματικό σημείο της $f$ αν για κάθε κύκλο κέντρου $(x_0,y_0)$, $S=S((x_0,y_0),r)$ $(r>0)$, υπάρχουν σημεία $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$ ώστε $f(x_0,y_0)<f(x_1,y_1)$ και $f(x_0,y_0)>f(x_2,y_2)$.

Παράδειγμα: $f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

---

Εάν έχουμε συνάρτηση $g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ που έχει κρίσιμο σημείο κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ δηλ. $g'(x_0)=0$ για να μπορέσουμε να βρούμε αν αυτό είναι σημείο ακροτάτου βασιζόμαστε στην συμπεριφορά της $g''$ (αν $g''(x_0)>0$ έχουμε τ. ελάχιστο, αν $g''(x_0)<0$ έχουμε τ. μέγιστο, αν $g''(x_0)=0$ δεν έχουμε συμπέρασμα (όλα μπορεί να μας συμβούν)).

Εάν $f:U(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, $U$=ανοικτό, $f$ να είναι $C^2$ και το $df(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\nabla f(x_0,y_0)(h_1,h_2)=0$ δηλ. το $(x_0,y_0)$ να είναι κρίσιμο σημείο, θα πρέπει να βοηθηθούμε από το 2-διαφορικό που εμφανίζεται στο Θ. Taylor (σελ. 101-102, Ηλ. Τάξη)

(T) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+D_1f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)+\frac{1}{2}D_2f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)$ για κάποιο $(\xi_1,\xi_2)$ που ανήκει στο ευθ. τμήμα $[(x_0,y_0),(x,y)]\subseteq U$ ($(\xi_1,\xi_2)$ εξαρτάται από το $(x,y)$)

όπου $D_1f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0$, αν το $(x_0,y_0)$ είναι <u>κρίσιμο σημείο</u>

και $D_2f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)=\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\xi_1,\xi_2)=:$

$$\underset{(f-C^2)}{\overset{(f_{xy}=f_{yx})}{=}}(x-x_0)^2 f_{xx}(\xi_1,\xi_2)+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}(\xi_1,\xi_2)+(y-y_0)^2 f_{yy}(\xi_1,\xi_2)$$

$$=(x-x_0,\,y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $\boxed{H(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)}}$ έχει τον ρόλο της δευτέρας παραγώγου (στο $(\xi_1,\xi_2)$)

Καλείται Εσσιανός (Hessian) της $f$ στο $(\xi_1, \xi_2)$.

Στον $\mathbb{R}$ έχουμε θετικούς, αρνητικούς αριθμούς και το 0. Χρειαζόμαστε ορισμό για θετικούς, αρνητικούς πίνακες! Ας τους ορίσουμε :

Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας 2x2

i) Ο $A$ είναι θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow (x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ $(A>0)$

ii) Ο $A$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow (x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < 0$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ $(A<0)$

iii) Ο $A$ είναι αόριστος $\Leftrightarrow$ αν υπάρχουν $(x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ ώστε
$(x',y')\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} > 0$ και $(x'',y'')\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} < 0$

(δηλ. δεν είναι ούτε θετικά, ούτε αρνητικά ορισμένος)

Ο ορισμός δεν είναι πρακτικός, αλλά έχουμε τα εξής ισοδύναμα (χάρη στον Sylvester)

i') Ο $A$ είναι θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow \alpha > 0$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$ $(A>0)$

ii') Ο $A$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow \alpha < 0$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$ $(A<0)$

iii') Ο $A$ είναι αόριστος $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 < 0$.

Είμαστε έτοιμοι να εξετάσουμε του τόπο (T) :

Έστω $\boxed{(x_0,y_0) \in \mathcal{U} \text{ κρίσιμο σημείο}}$, τότε έχουμε

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2} D_2(\xi_1,\xi_2)(x-x_0, y-z_0) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\, H(\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}.$$

i) Εάν ο $H(x_0,y_0) > 0$, τότε υπάρχει ⊛ $S((x_0,y_0),\delta) \subseteq \mathcal{U}$ ώστε $H(x',y') > 0$, $(x',y') \in S((x_0,y_0),\delta)$
άρα : $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ για $(x,y) \in S((x_0,y_0),\delta)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$.

Συνεπώς (Sylvester) : Αν $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ και $f_{xx}^{(x_0,y_0)} \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$
Τότε το $(x_0,y_0)$ είναι σημείο ΤΟΠΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ.

---

⊛ Οι $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ είναι συνεχείς ($f$ είναι $C^2$) και ο ισχυρισμός ⊛ έπεται.

ii) Εάν ο $H(x_0,y_0)<0$, ανάλογα $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ για $(x,y)\in S((x_0,y_0),\delta)$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$

Συνεπώς (Sylvester) : Αν $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0$
Τότε το $(x_0,y_0)$ είναι σημείο ΤΟΠΙΚΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ.

iii) Εάν ο $H(x_0,y_0)$ είναι αόριστος, τότε ως προς μια κατεύθυνση $(x_0,y_0)+t(x',y')$ ($|t|<\delta$) θα έχουμε (γνήσιο) τοπικό μέγιστο και ως προς μια άλλη θα έχουμε (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο (βλ. ορισμού αορίστου πίνακα) των περιορισμών της $f$ στις κατευθύνσεις αυτές.

Συνεπώς (Sylvester) : Αν $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)<0$
Τότε το $(x_0,y_0)$ είναι ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

Στις άλλες περιπτώσεις ($D_2f(x_0,y_0)=0$) ΔΕΝ έχουμε συμπέρασμα

Όλα τα παραπάνω επεκτείνονται για συναρτήσεις $f: U(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, $n\geq 3$
$U$=ανοικτό, $f$ να είναι $C^2$.

Σημείωση: Υπάρχει και άλλη ισοδυναμία του ορισμού $A>0$, $A<0$, $A=$αόριστος με την χρήση των ιδιοτιμών $\lambda_1,\lambda_2$ του πίνακα $A$ :

i) $A>0 \iff \lambda_1, \lambda_2>0$

ii) $A<0 \iff \lambda_1, \lambda_2<0$

iii) $A$ αόριστος $\iff \lambda_1\cdot\lambda_2<0$

Βιβλιογραφία: Η/Τάξη < Βιβλιογραφία / Συνδέσμοι. και όπου αλλού θέλετε/ψάξτε....