26ο ΜΑΘΗΜΑ

02/06/09

Ανάλυση ΙΙ

• <u>Υπενθύμιση</u>

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $A =$ ανοικτό, f C^2

$(x_0, y_0) \in A$

$(x, y) \in A$, $[(x,y),(x_0,y_0)] \subseteq A$ τότε $\exists (\xi_1, \xi_2) \in [(x,y),(x_0,y_0)]$ (εξαρτάται από το (x,y))

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(\xi_1,\xi_2)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$ (Θ. Taylor)

$$H(x', y') = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x',y')}$$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο $(x',y') \in A$

• Ο $H(x',y')$ είναι : $>0 \iff f_{xx}(x',y') > 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy})_{(x',y')} > 0$

$<0 \iff$ » <0, » >0

αόριστος $\iff$ (αδιάφορο τι είναι) » <0

Εάν το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο, δηλ. $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

• $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, $(f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy})_{(x_0,y_0)} > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ τοπικό ελάχιστο

• $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, » » $>0 \Rightarrow$ » τοπικό μέγιστο

- $(f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy})_{(x_0,y_0)} < 0 \Rightarrow$ » σαγμ. σημείο.

Ασκήσεις

(1) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2y + 4$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να ευρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f στο $\mathbb{R}^2$

ΛΥΣΗ: Κρίσιμο σημείο $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

$f_x = y - 2x - 2$ | $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$

$f_y = x - 2y - 2$ | $\Leftrightarrow \quad \underline{x_0 = -2 = y_0}$.

$f_{xx}(-2,-2) = -2 < 0$

$f_{yy}(-2,-2) = -2$

$f_{xy}(-2,-2) = 1$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$. Άρα το $(-2,-2)$ είναι <u>τοπικό μέγιστο</u>

(2) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα.

<u>ΛΥΣΗ</u>: $f_x = 3x^2 - 6x$ | Κρίσιμα σημεία: $(0,0)$, $(2,0)$

$f_y = 2y$

-i) Για το $(0,0)$:

$f_{xx} = 6x - 6$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$, $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$

$f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 0$

Άρα το $(0,0)$ είναι <u>σαγματικό σημείο</u>.

-ii) Για το $(2,0)$: $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$

Άρα το $(2,0)$ είναι <u>τοπικό ελάχιστο</u>.

<u>Σημείωση</u>: Εάν f κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ <u>x_0 = ολικό ελάχιστο</u>.

<u>διότι</u>: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow f(x) \geq f(x_0) \ \forall x$

• Εάν $f''(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow f$ κυρτή ∪. Το ρόλο της f'' στις 2-μεταβλητές τον παίζει ο H=Εσσιανός πίνακας.

(3)* Έστω συνάρτηση $f: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $A = (a,b) \times (\gamma, \delta) \subseteq$

C^2 συνάρτηση

και $f_{xx}(x,y) > 0$, $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(x,y) > 0$

$(\Leftrightarrow H(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in A)$

• Εάν $(x_0, y_0) \in A$ κρίσιμο σημείο $\Rightarrow (x_0, y_0)$ ολ. ελαχ

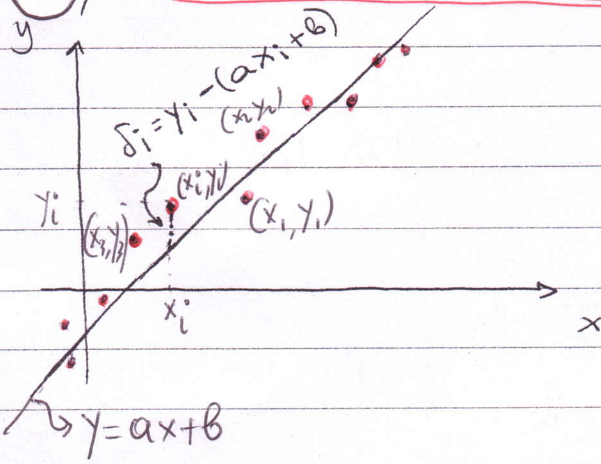
ΛΥΣΗ Θεωρούμε τυχαίο $(x,y) \in A$.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(\xi_1, \xi_2)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$> f(x_0, y_0), \forall (x,y) \in A - \{(x_0, y_0)\}$. και επομένως

είναι όντως ολικό ελάχιστο (και μάλιστα γνήσιο!).

(4)* Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.



Πειραματικά δεδομένα $D = \{(x_i, y_i), i = 1 \dots n\}$ $(n \geq 2)$

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια "καλή" ευθεία $y = ax + b$ που να τα "προσεγγίσει".

• Έστω λοιπόν ότι έχουμε $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $(n \geq 2)$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\big((ax_i + b) - y_i\big)^2 \ , \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 .$$

ΛΥΣΗ: $\cdot f_a = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i$,

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)$$

$\cdot f_b = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)$,

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i + nb = \sum_{i=1}^{n}y_i$$

Κρίσιμο (a_0, b_0)

$$\begin{cases} a_0\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) + b_0\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right) \\ a_0\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right) + b_0\cdot n = \left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right) \end{cases}$$

Σύστημα 2×2 με a_0, b_0 άγνωστους

$(a_0, b_0) = ;$ → προσδιορίζεται(+) και είναι κρίσιμο σημείο.

$$f_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 > 0$$

$$f_{bb} = 2n$$

$$f_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i$$

(+)
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)} \\ b_0 = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i - a_0\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ab} & f_{bb} \end{vmatrix}_{(a_0,b_0)} = \begin{vmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left[n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right] > 0 \quad \text{από Cauchy Swartz}.$$

$$\text{C-S}: \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot 1)\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

(Εφ' όσον υπάρχει $x_k \neq 1$ διότι έχουμε $n \geq 2$)

ή C-S: $|(x_1, x_2, \dots, x_n)\bullet(1,1,1,1,\dots 1)| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| < \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\bullet\sqrt{1+1+\dots+1}$

(Thomas Σχ. 11.56, σελ. 913-915
Άσκηση 45

• Μερικές Παράγωγοι Συναρτήσεων των οποίων οι μεταβλητές υπόκεινται σε περιοριστικές συνθήκες

(Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων)

ΘΠΣ 1 | $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), C^1, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

Εάν $\vec{\nabla F}(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ δ.χ. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Τότε $\exists\ S\big((x_0, y_0), \delta\big) \subseteq \mathbb{R}^2$ και
(ανοικτός δίσκος)

$$f: S \to \mathbb{R} \quad \text{ώστε} \quad \begin{cases} F(x, y, f(x,y)) = 0, & (x,y) \in S \\ z_0 = f(x_0, y_0). \end{cases}$$

Τότε: (Αλυσ. Παρ)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \cancel{\frac{\partial x}{\partial x}}^{\,1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}^{\,0} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}^{\,0} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}^{\,1} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(x, y ανεξάρτητες μεταβλητές)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ στο } S \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ στο } S$$

• Ασκήσεις: A Έστω $F(x,y) = y^2 - x^2 - \eta\mu(xy)\ (=0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(βλ. Σχήμα A) σελ. 165)

$(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, $F(x_0, y_0) = 0$.

Νδο $\exists$ περιοχή S του $x_0 = \sqrt{\pi}$ ώστε η $F(x,y)=0$ να είναι το γράφημα μιας $f: S \to \mathbb{R}$, $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ F(x, f(x)) = 0, \ x \in S \end{cases}$

$$\nabla F(x,y) = \left(-2x - y\,\text{συν}(xy),\ 2y - x\,\text{συν}(xy)\right)$$

$$\nabla F(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \left(-2\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi},\ 2\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}\right)$$
$$= \left(-\sqrt{\pi},\ +3\sqrt{\pi}\right) \neq (0,0).$$ (Άρα η $F(x,y)=0$ λύνεται ως προς x ΚΑΙ ως προς y)

Άρα $\exists\ \delta>0 : f:(\sqrt{\pi}-\delta, +\sqrt{\pi}+\delta) \to \mathbb{R}$, C^1 ώστε το $F(x, f(x)) = 0$, $x \in S$. και $f(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$

δηλ. $f^2(x) - x^2 - \text{ημ}(x f(x)) = 0$, $x \in S$

$$2f(x) f'(x) - 2x - \text{συν}(x f(x)) \cdot [f(x) + x f'(x)] = 0.$$

$$x_0 = \sqrt{\pi} \to 2\sqrt{\pi} \cdot f'(\sqrt{\pi}) - 2\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} f'(\sqrt{\pi}) = 0$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{\pi} \cdot f'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(\sqrt{\pi}) = 1/3}$$

(Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε την f αλλά υπολογίζεται η $f'(\sqrt{\pi})$)

B $F(x,y) = (x-2)^3 y + x e^{y-1}$. Υπάρχει $f:(1-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $(f(x)-3)y^2 + f(y) e^{y-1} = 0$ (για κάποιο $\delta>0$) Σχ. B σελ. 167

Θ. ΠΣΣ2 Γεν. μορφή: Έστω $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, C^1

$$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0.$$

Έστω
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} \neq 0.$$

τότε $\exists\ S = S((x_0,y_0),\delta) \subseteq \mathbb{R}^2$ που

$$f, g : S \to \mathbb{R},\ C^1 : \begin{cases} F(x,y,f(x,y), g(x,y)) = 0 \\ G(x,y,g(x,y), g(x,y)) = 0 \end{cases}$$

και $f(x_0, y_0) = u_0$, $g(x_0, y_0) = v_0$ | Δηλ. Το σύστημα γίνεται $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$

Άσκηση:

$$\left.\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 \\ z^3 - xy &+ yz + x^3 = 1 \end{aligned}\right\}$$

Εξετάστε αν σε περιοχή του $(2,-1,1,6)$ το σύστημα λύνεται ως προς x, y

Υπολογίστε: $\dfrac{\partial w}{\partial x}(2,-1) = ?$

Λύση:

$$F(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 - w$$

$$G(x,y,z,w) = z^3 - xy + yz + y^3 - 1$$

$$F(2,-1,1,6) = 0 = G(2,-1,1,6)$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial w} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} & \dfrac{\partial G}{\partial w} \end{vmatrix}_{(2,-1,1,6)} = (3z^2 + y)_{(2,-1,1,6)} = 2 \neq 0$$

Άρα $\exists\ \delta > 0$, $f, g : S((2,-1),\delta) \to \mathbb{R}$

ώστε: $x^2 + y^2 + f^2(x,y) - g(x,y) = 0$

και $f^3(x,y) - xy + y f(x,y) + y^3 - 1 = 0$

(Για $(x,y) \in S((2,-1),\delta)$)

$f(2,-1) = 1$

$g(2,-1) = 6$.

$\begin{pmatrix} z = f(x,y) \\ w = g(x,y) \end{pmatrix}$

$\ldots \dfrac{\partial w}{\partial x}(2,-1) = 3$. (Thomas, Παρ. 2, σελ 927 για το υπολογιστικό)

Σημ: Εάν $\Gamma = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ είναι καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ δεν μπορούμε πάντοτε να λύσουμε ως προς x ή ως προς y, ώστε η καμπύλη να γίνει ΤΟΠΙΚΑ το γράφημα μιας f.

Παραδείγματα

Βλέπε Σχήματα + Γ, Δ (σελ. 169, 171)

+ Συναρτήσεις