

ΕΡΓΑΣΙΑ
Ανάλυση II και Εφαρμογές
(Ε. Αθανασιάδου)

Ασκήσεις 3^{ου} Μαθήματος (30-03-2020)

Άσκηση 1 (προαιρετική): Να σχεδιαστούν οι ισοϋφαείς καμπύλες της συνάρτησης $z = f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$.

Άσκηση 2: Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y \sin \frac{1}{x}.$$

Άσκηση 3 (προαιρετική): Έστω $(\vec{a}_\nu)$ μία ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $(a_{i\nu})$ για $i = 1, 2, \dots, n$ οι συνιστώσες ακολουθίες της $(\vec{a}_\nu)$ και $\vec{a} = (a_1, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$

ii) $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$

Άσκηση 4 (προαιρετική): Να αποδειχθεί ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη.

Άσκηση 5 (προαιρετική): Έστω $(\vec{a}_\nu)$ και $(\vec{b}_\nu)$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ και $\vec{b}_\nu \rightarrow \vec{b}$. Τότε να αποδειχθεί ότι

i) $\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$

ii) $\lambda \vec{a}_\nu \rightarrow \lambda \vec{a}$ (για $\lambda \in \mathbb{R}$)

iii) $\vec{a}_\nu \cdot \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$

iv) $\vec{a}_\nu \times \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$ (για $n = 3$)

Άσκηση 6 (προαιρετική): Να αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μία συγκλίνουσα υποακολουθία.

Ασκήσεις 4^{ου} Μαθήματος (06-04-2020)

Άσκηση 1: Να αποδειχθεί ότι οι κλειστές σφαίρες είναι κλειστά σύνολα.

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι

i) το $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

ii) το $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ είναι κλειστό σύνολο.

Άσκηση 3: Να βρεθεί το σύνορο των συνόλων

i) $(0, +\infty)$

ii) $\mathbb{R}$

Άσκηση 4 (προαιρετική): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) A κλειστό

ii) $A' \subseteq A$

iii) $\partial A \subseteq A$

Άσκηση 5: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, με $|f(\vec{x})| \leq M$, $\forall \vec{x} \in A$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0$. Τότε να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x})g(\vec{x})) = 0.$$

Άσκηση 6 (προαιρετική): Έστω $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, όπου $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεων της $\vec{f}$ για $1 \leq j \leq m$.

Έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f} = \vec{b}$

ii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j = b_j$, $\forall j = 1, 2, \dots, m$.

Άσκηση 7 (προαιρετική): Έστω $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Έστω $\vec{a}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$.

Τότε να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα παρακάτω

i) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$

ii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ (για $\lambda \in \mathbb{R}$)

iii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \right) \cdot \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \right)$

iv) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \right) \times \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \right)$ (για $m = 3$)

Άσκηση 8 (προαιρετική): Έστω $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\vec{a}$ σημείο συσσώρευσης του A . Έστω ότι η $\vec{f}$ είναι μηδενική στο $\vec{a}$ (δηλαδή $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$) και η $\vec{g}$ είναι τοπικά φραγμένη στο $\vec{a}$ (δηλαδή υπάρχουν $M > 0$ και $\delta > 0$ έτσι ώστε $\|\vec{f}(\vec{x})\| < M$, $\forall \vec{x} \in A$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$). Να αποδειχθεί ότι

- i) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|) = 0$
- ii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$
- iii) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = 0$
- iv) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$ (για $m = 3$)

Άσκηση 9: Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right)$$

Άσκηση 10: Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

Ασκήσεις 5^{ου} Μαθήματος (13-04-2020)

Άσκηση 1: Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f είναι C^1 , όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Άσκηση 2: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι $f_x(0, y)$, $f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το διαφορικό $D\vec{f}(1, 2, -1)$ της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y - z, xyz^2, 2xy - y^2z)$.

Άσκηση 4: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- i) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y .
- ii) Να εξεταστεί η συνέχεια των μερικών παραγώγων f_x, f_y στο σημείο $(0, 0)$.
- iii) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 5: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- i) Να εξεταστεί αν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(0, 0)$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$.
- ii) Να εξεταστεί αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 6: Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x + \frac{y}{z}$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου της f στο σημείο $\vec{a} = (4, 3, -1)$ κατά την κατεύθυνση κατά την οποία λαμβάνεται.

Ασκήσεις 7^{ου} Μαθήματος (04-05-2020)

Άσκηση 1: Να βρεθούν το κέντρο βάρους $C(\bar{x}, \bar{y})$, οι ροπές αδρανείας I_x και I_y και η πολική ροπή I_0 του τριγωνικού χωρίου OAB με $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ και $B = (1, 1)$ πάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα (αμελητέου πάχους) πυκνότητας $\delta(x, y) = x + y^2$.

Άσκηση 2: Να βρεθεί η μάζα μίας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = x + 1$, που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 xze^{y+z} dx dz dy.$$

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_B e^{x^2+y^2+z^2} dx dy dz ,$$

όπου B το στερεό που βρίσκεται εντός του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) και μεταξύ των επιπέδων $z = 0$ και $z = b$ ($b > 0$). Επιπλέον, να υπολογιστεί ο όγκος $V(B)$ του στερεού B .

Άσκηση 5: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_B (e^x + x) \sin y \, dx dy , \quad \text{όπου } B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}] .$$

Άσκηση 6: Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\cos y}{y} dy dx .$$

Ασκήσεις 8^{ου} Μαθήματος (11-05-2020)

Άσκηση 1: Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία βαθμωτή συνάρτηση και $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία διανυσματική συνάρτηση. Να γίνουν οι αποδείξεις των παρακάτω προτάσεων

$$i) \nabla \times (\nabla f) = \vec{0} .$$

$$ii) \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 .$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο (δηλαδή $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$).

Ασκήσεις 9^{ου} Μαθήματος (18-05-2020) Προσομοίωση (χρόνος 1 ώρα)

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma^+} (x^3 + y^3) dx + (2y^3 - x^3) dy ,$$

όπου $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Άσκηση 2: Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης

$$F(x, y) = (2xy, x^2) , \quad \vec{r}(t) = (t, t^2) , \quad t \in [0, 1] ,$$

που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B z^2 dx dy dz ,$$

όπου B είναι η σφαίρα με εξίσωση επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Επιπλέον να υπολογιστεί ο όγκος $V(B)$ της σφαίρας B .

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz ,$$

όπου B το στερεό που βρίσκεται στην 1^{η} στερεά γωνία και περιβάλλεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$ και $z = 4$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.
Επιπλέον να υπολογιστεί ο όγκος $V(B)$ του στερεού B .

Συμπληρωματικές Ασκήσεις για το 9ο Μάθημα (18-05-2020)

Άσκηση 1: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x y z e^{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ στο σημείο $\vec{a} = (0, 1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Άσκηση 2: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x + y^2 + z^3 .$$

- i) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(0, 0, 0)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
ii) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(1, 1, 1)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy}) ,$$

όπου $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t) : t \in [0, \frac{3\pi}{2}] \right\}$.

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

όπου Γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο $(0, 0)$.

Άσκηση 5: Να αποδειχθεί ότι

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy = 0.$$

$$ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Άσκηση 6: Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια, η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Άσκηση 7: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Να υπολογιστεί το $df(2, 3)$.

Άσκηση 8: Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B , που βρίσκεται στο (1ο ογδομήμιο $x, y, z \geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9$, $3z = x^2 + y^2$.

Άσκηση 10^{ου} Μαθήματος (25-05-2020)

Άσκηση: Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με $z = f(x, y)$, $x = u + v$, $y = u - v$.
Να αποδειχθεί ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Συμπληρωματικές Ασκήσεις για το 10ο Μάθημα (25-05-2020)

Άσκηση 1: Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις:

$$i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$iii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$iv) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$v) f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$vi) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Άσκηση 2: Να υπολογιστεί στο σημείο $(0, 1)$ η παράγωγος (πίνακας *Jacobi*) της συνάρτησης $f(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί η f_{xx} και η f_{yy} των συναρτήσεων:
 $i) f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x$, $ii) f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2)$.

Άσκηση 4: $a)$ Να υπολογιστεί η f_{zx} των συναρτήσεων:
 $i) f(x, y, z) = \sin(xy) \cos(z^2)$, $ii) f(x, y, z) = x^{y+z}$

$b)$ Να υπολογιστεί η f_{yx} και η f_{zz} των συναρτήσεων:
 $i) f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy)$, $ii) f(x, y, z) = ze^{x+y+z}$.

Άσκηση 5: Να εξεταστεί αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση:

$$\vec{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Άσκηση 6: Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ κατά την κατεύθυνση $\vec{a} = (1, 2, -1)$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Άσκηση 7: Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου $f_{\vec{a}}(1, 2, 0)$ της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2z + ye^z + xz^3$ και η κατεύθυνση κατά την οποία λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Άσκηση 8: i) Να υπολογιστεί η λαπλασιανή της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3)$.
ii) Να εξεταστεί αν είναι συντηρητικό το πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y)$.

Ασκήσεις (01-06-2020)

Άσκηση 1: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο $(0, 0)$, αλλά η συνάρτηση $f(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

Άσκηση 2: Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ και η συνάρτηση είναι η $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y)$.

Άσκηση 3: Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{u}{v}$ και η συνάρτηση είναι η $f(x, y) = 2xy$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y)$.

Άσκηση 4: Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$$

στο σημείο $P(-1, 1, 1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Άσκηση 5: Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και από το επίπεδο $z = 16$.

Άσκηση 6: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} y \, ds$, όπου Γ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t$ και $y(t) = \sqrt{t}$, $2 \leq t \leq 6$.

Ασκήσεις στα Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί το αριθμητικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (xy + e^z) \, dS$, όπου $S = S(\vec{r})$ είναι η παραμετρική επιφάνεια που ορίζεται από τη διπαραμέτρηση $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, για $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Άσκηση 2: Να υπολογιστεί το αριθμητικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S f \, dS$, της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz^2$, όπου S είναι το γράφημα της συνάρτησης $z = \phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, για $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, y + xz, ye^z)$, πάνω στην παραμετρική επιφάνεια $S = S(\vec{r})$, όπου $\vec{r}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, με $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί το διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, -2xz)$, όπου S είναι το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.