

Ασκήσεις τρίτου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραΐδης

17 Απριλίου 2020

Άσκηση 1

Έστω $(\vec{a}_\nu)$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $(a_{i\nu})$, $i = 1, 2, \dots, n$ οι συνιστώσες ακολουθίες της $(\vec{a}_\nu)$ και $(\vec{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$
- $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ για $i=1,2,\dots,n$

Λύση

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Έστω $a_{j\nu} \rightarrow a'_j \neq a_j$ με a_j μια τυχαία συνιστώσα ακολουθία. Γνωρίζουμε ότι $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{j\nu}, \dots, a_{n\nu}) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

Όμως $a_{j\nu} \rightarrow a'_j$. Οπότε, λόγω της μοναδικότητας του ορίου ακολουθίας έχουμε $a_j = a'_j$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι αν $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ τότε $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Έστω ότι $(\vec{a}_\nu) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a'_j, \dots, a_n)$ με $a'_j \neq a_j$.

Γνωρίζουμε ότι $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$

Άρα έχουμε ότι $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{j\nu}, \dots, a_{n\nu}) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$ και λόγω της μοναδικότητας του ορίου $a_j = a'_j$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Οπότε έχουμε αποδείξει ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη.

Λύση

α) τρόπος

Αφού $(\vec{a}_\nu)$ συγκλίνουσα, τότε εξ'ορισμού $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (\vec{a}_\nu) = \vec{a}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Γνωρίζουμε ότι αν $(\vec{a}_\nu) \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$
 $\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}$ Θέτω $M = \max(\|\vec{a}_1\|, \|\vec{a}_2\|, \dots, \|\vec{a}_n\|, \|\vec{a}\|)$
Τότε, $\|\vec{a}_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ Άρα η $(\vec{a}_\nu)$ είναι φραγμένη.

β) τρόπος

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}||$ χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}||$ και $-||\vec{a} - \vec{b}|| \leq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$. Έχουμε

$$\begin{aligned} ||\vec{a}| &= ||(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| + ||\vec{b}|| \Rightarrow ||\vec{a}| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| + ||\vec{b}|| \Rightarrow \\ &||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{b}| &= ||(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a}|| \leq ||\vec{b} - \vec{a}|| + ||\vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{b}| \leq ||\vec{b} - \vec{a}|| + ||\vec{a}|| \Rightarrow \\ ||\vec{b}| - |\vec{a}|| &\leq ||\vec{b} - \vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \geq -||\vec{b} - \vec{a}|| = -||\vec{a} - \vec{b}|| \Rightarrow \\ ||\vec{a}| - |\vec{b}|| &\geq -||\vec{a} - \vec{b}|| = -||\vec{a} - \vec{b}|| \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη. Αφού η $(\vec{a}_\nu)$ είναι φραγμένη τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > n_0 ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon &\Rightarrow |||\vec{a}_\nu| - |\vec{a}|| \leq ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{a}_\nu| - |\vec{a}|| \leq ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon \Rightarrow \\ &||\vec{a}_\nu| < |\vec{a}| + \varepsilon \quad \forall \nu > n_0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $M = \max\{|\vec{a}_1|, |\vec{a}_2|, \dots, |\vec{a}_{n_0}|, |\vec{a}| + \varepsilon\}$. Άρα $||\vec{a}_\nu| \leq M \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Άσκηση 3

Έστω $(\vec{a}_\nu)$ και $(\vec{b}_\nu)$ συγκλίνουσες ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ και $\vec{b}_\nu \rightarrow \vec{b}$. Τότε ισχύει $\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$.

Λύση

Αφού η $(\vec{a}_\nu)$ είναι συγκλίνουσα, τότε για $\varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \text{για } n > n_1 ||\vec{a}_n - \vec{a}|| < \varepsilon$ (1)

Όμοια για την $(\vec{b}_\nu)$, για $\varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} : \text{για } n > n_2 ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < \varepsilon$ (2)

Τώρα, για $N = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow ||\vec{a}_n - \vec{a}|| + ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < 2\varepsilon \Rightarrow \\ ||(\vec{a}_n - \vec{a}) + (\vec{b}_n - \vec{b})|| &\leq ||\vec{a}_n - \vec{a}|| + ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < 2\varepsilon \Rightarrow \\ ||(\vec{a}_n + \vec{b}_n) - (\vec{a} + \vec{b})|| &< 2\varepsilon \quad \text{Άρα } \vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μία συγκλίνουσα υποακολουθία.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass ισχύει για ακολουθίες πραγματικών αριθμών ($n = 1$). Άρα, λόγω του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass, κάθε συνιστώσα ακολουθία της $(\vec{a}_\nu)$ έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία. Άρα, αφού κάθε συνιστώσα ακολουθία έχει συγκλίνουσα ακολουθία, ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η $(\vec{a}_\nu)$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

Ασκήσεις έβδομου μαθήματος ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραϊδής (AM 201900187)

9 Μαΐου 2020

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα I_x, I_y, I_o του τριγωνικού χωρίου $O\hat{A}B$ με κορυφές $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ πάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα αμελητέου πάχους πυκνότητας $\delta(x,y) = x + y^2$

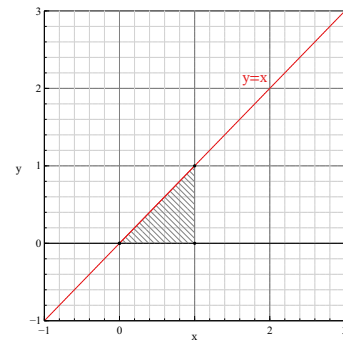
Λύση

Αρχικά, θα σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση για να βρούμε το σύνολο D στο οποίο θα ολοκληρώσουμε.

Μπορούμε να δούμε λοιπόν ότι $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} I_x &= \int \int_D y^2 \delta(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x y^2 (x + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (y^2 x + y^4) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} x + \frac{y^5}{5} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{30} \right]_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{1}{10}$$



$$\begin{aligned} I_y &= \int \int_D x^2 \delta(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x^2 (x + y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^2 x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{y^3}{3} x^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{18} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{18+5}{90} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{23}{90}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{1}{10} + \frac{23}{90} = \frac{23+9}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

Άσκηση 2

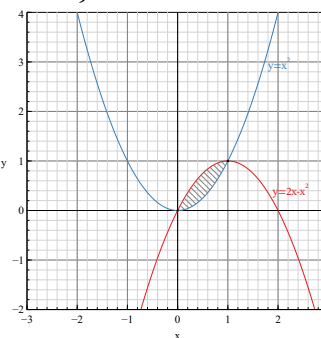
Βρείτε την μάζα μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = x + 1$ που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$

Λύση

Πάλι, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μας για να δούμε ποιά είναι το σύνολο D στο οποίο θα ολοκληρώσουμε:

Μπορούμε να δούμε λοιπόν ότι $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x - x^2\}$

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x-x^2} (x+1) dy dx \\ &= \int_0^1 [yx + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{2x-x^2} dx = \int_0^1 \left((2x-x^2)x + 2x - x^3 - 2x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 (-2x^3 + 2x) dx = [x^2 - \frac{2}{4}x^4]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $I = \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy$ και σαν x-απλο και σαν y-απλο, όπου $B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Λύση

α) σαν y-απλο

$$\begin{aligned} I &= \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (e^x + x) \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y (e^2 + 2 - e - \frac{1}{2}) dy = \left[-\cos y (e^2 - e + \frac{3}{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^2 - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

β) σαν x-απλο

$$\begin{aligned} I &= \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + x) \sin y dy dx = \int_1^2 (e^x + x) [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_1^2 (e^x + x)(0 - (-1)) dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e^2 + \frac{4}{2} - e - \frac{1}{2} = e^2 - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ασκήσεις όγδοου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραϊδής (AM: 201900187)

21 Μαΐου 2020

Άσκηση 1

Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 στο D . Να δείξετε ότι $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ και $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Λύση

$$\bullet \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

Όμως, αφού η f είναι C^2 στο D , ισχύει το Θεώρημα Clairant. Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

$$\text{Άρα } \nabla \times (\nabla f) = \hat{i}0 + \hat{j}0 + \hat{k}0 = \vec{0}$$

$$\bullet \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \nabla \cdot \left[\hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial F_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial y \partial z} = 0$$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο

Λύση

Για να είναι αστρόβιλο το πεδίο $\vec{F}$ πρέπει $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Αφού το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό μπορεί να γραφτεί ως $\nabla \Phi$. Έχουμε:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0} \quad (\text{Από άσκηση 1})$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

Συμπληρωματικές Ασκήσεις 9ου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραιδής

18 Ιουνίου 2020

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2}$ στο σημείο $\vec{a} = (0, 1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Λύση

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{Άρα το } \vec{u} \text{ είναι μοναδιαίο}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2ye^{x^2+y^2+z^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x^2+y^2+z^2} + 2y^2xe^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xyze^{x^2+y^2+z^2}$$

Αφού υπάρχουν οι μερικοί παράγωγοι της f και είναι συνεχείς, η f είναι διαφορίσιμη. Οπότε, απο γνωστό θεώρημα έχουμε ότι

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = (1 \cdot e^{0+1+1} + 0, 0 + 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^2$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

i) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(0, 0, 0)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ii) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(1, 1, 1)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση

i)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$$

Αφού υπάρχουν οι μερικοί παράγωγοι της f και είναι συνεχείς, η f είναι διαφορίσιμη. Απο γνωστό θεώρημα, η κατευθυνόμενη παράγωγος γίνεται μέγιστη όταν τα διανύσματα $\nabla f(\vec{a})$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα και παράλληλα, ενώ γίνεται ελάχιστη όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα.

Αρχικά, βρίσκουμε πότε τα διανύσματα είναι παράλληλα, δηλαδή πότε ισχύει $\nabla f(0, 0, 0) \times \vec{u} = \vec{0}$

$$\nabla f(0, 0, 0) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 0 - \hat{j}(u_z - 0) + \hat{k}(u_y - 0) = \vec{0}$$

Άρα πρέπει $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$ για να είναι παράλληλα. Όμως, το $\vec{u}$ είναι διάνυσμα κατεύθυνσης, οπότε πρέπει να είναι και μοναδιαίο.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2} = 1 \Rightarrow |u_x| = 1$$

Έτσι, όταν $u_x = 1$ τα $\nabla f(0, 0, 0)$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα και έχουμε μέγιστο, ενώ όταν $u_x = -1$ τα $\nabla f(0, 0, 0)$, $\vec{u}$ είναι αντίρροπα και έχουμε ελάχιστο.

ii)

Πάλι ψάχνουμε πότε τα διανύσματα $\nabla f(1, 1, 1)$, $\vec{u}$ είναι παράλληλα:

$$\nabla f(1, 1, 1) \times \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \hat{i}(2u_z - 3u_y) - \hat{j}(u_z - 3u_x) + \hat{k}(u_y - 2u_x) = \vec{0}$$

Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 2u_z - 3u_y = 0 \\ u_z - 3u_x = 0 \\ u_y - 2u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3u_x - 3 \cdot 2u_x = 0 \\ u_z = 3u_x \\ u_y = 2u_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ u_z = 3u_x \\ u_y = 2u_x \end{cases}$$

Οπότε $\vec{u} = (u_x, 2u_x, 3u_x)$ και αφού $\vec{u}$ κατεύθυνση τότε:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + (2u_x)^2 + (3u_x)^2} = \sqrt{14}|u_x| = 1 \Rightarrow |u_x| = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Αφού $\nabla f(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, τα $\nabla f(1, 1, 1)$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα (και έχουμε μέγιστο) όταν $u_x = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ενώ είναι αντίρροπα (και έχουμε ελάχιστο) όταν $u_x = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy})$$

Όπου $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t) : t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}$

Λύση

Η Γ είναι C^1 . Έχουμε $\vec{r}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\cos t \sin^2 t, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt = \int_0^{3\pi/2} (\cos^3 t, \sin^3 t, \sqrt[3]{\cos^3 t \sin^3 t}) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\cos t \sin^2 t, 1) dt \\ &= \int_0^{3\pi/2} (-3\sin^2 t \cos^2 t + 3\sin^2 t \cos^2 t + \sqrt[3]{\cos^3 t \sin^3 t}) dt = \int_0^{3\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \sin 2t dt \\ &= -\frac{1}{2} [\cos 2t]_0^{3\pi/2} = -\frac{1}{2} (\cos(3\pi/2) - \cos 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (P, Q)$$

Όπου Γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο $(0, 0)$.

Λύση

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

Το χωρίο D που περικλύεται από την καμπύλη Γ είναι απλό και συνεκτικό χωρίο και η Γ είναι κατα τμήματα C^1 καμπύλη και θετικά προσανατολισμένη. Επομένως, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Green και έχουμε:

$$I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_D \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy$$

Τώρα, εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{με} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(\frac{4r \cos \theta r \sin \theta}{r^4} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta [r^2]_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} [\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0$$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy = 0 \quad ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} y = 0$$

Λύση

i)

Έστω $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy$ και τυχαίο $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ να ισχύει $|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy - 0| < \varepsilon$. Έχουμε:

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right| = \frac{|x^2 - y^2| \cdot |xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |xy|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \leq x^2 + y^2 < \delta^2$$

Άρα αρκεί να διαλέξουμε $\delta^2 = \varepsilon$.

Έστω $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} y$ και τυχαίο $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ να ισχύει $|\frac{2xy}{x^2 + y^2} y - 0| < \varepsilon$. Έχουμε:

$$\left| \frac{2xy}{x^2 + y^2} y \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 2|x| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta$$

Άρα αρκεί να διαλέξουμε $2\delta = \varepsilon$.

Άσκηση 6

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

Για $(x, y) \neq 0$ η $f(x, y)$ είναι συνεχής.

$$f(x, 0) = \frac{2x^2 \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad (x, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x, x^2) = \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^2 + x^4} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{για} \quad (x, x^2) \rightarrow (0, 0)$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$ καθώς το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Να υπολογιστεί το $df(2, 3)$

Λύση

Η f είναι διαφορίσιμη καθώς οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Επίσης, $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$ και $\nabla f(2, 3) = (4, 24)$. Άρα

$$df(2, 3)(x, y) = \nabla f(2, 3) \cdot (x, y) = (4, 24) \cdot (x, y) = 2x + 24y$$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο $(x, y, z \geq 0)$ και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9$, $3z = x^2 + y^2$

Λύση

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = \frac{r^2}{3} \quad \text{με} \quad 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{r^2}{3} \leq z \leq 3$$

$$I = \int \int \int_B dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_{r^2/2}^3 r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \left(3 - \frac{r^2}{2} \right) dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^4}{8} \right]_0^3 d\theta \Rightarrow$$

$$I = \frac{3}{2} 9 [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{27\pi}{4}$$